Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

В. В. ВАГНЕР

О ВМЕЩЕНИИ ПОЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В X_n В ПОСТОЯННОЕ ПОЛЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 IV 1949)

Мы будем говорить, что в аффинном N-пространстве E_N задано постоянное поле M-поверхностей, если с каждой точкой E_N ассоциирована M-поверхность в этом же пространстве E_N, причем M-поверхности, ассоциированные с произвольными точками P_1 и P_2, переводятся одна в другую в результате трансляции, переводящей одну из данных точек в другую. Таким образом, постоянное поле M-поверхностей может быть определено уравнениями

$$X^A = L^A(H^C) + X_0^A \quad (A = 1, \ldots, N; \quad C = 1, \ldots, M), \tag{1}$$

где X_0^A —точка, с которой ассоциирована данная M-поверхность.

Пусть, далее, в E_N задана n-поверхность

$$X^A = \Phi^A(\xi^A) \quad (\alpha, \ldots, \omega = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Предположим, что ее касательные n-плоскости пересекают M-поверхности поля (1), ассоциированные с точками касания, по m-поверхностям. Тогда мы получаем в E_N поле m-поверхностей, заданное на n-поверхности (2), состоящее из m-поверхностей, лежащих в касательных n-плоскостях поверхности (2):

$$X^A = \Phi_\alpha^A(\xi^\lambda) l^\alpha(\xi^\lambda, \eta^c) + \Phi^A(\xi^\lambda) \quad (a, b, c = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

Будем говорить, что это поле индуцировано полем (1). Мы будем говорить далее, что оно нормально индуцировано, если при любой достаточно малой деформации n-поверхности (2) мы будем получать на деформированной поверхности снова индуцированное поле m-поверхностей. Легко видеть, что в этом случае должно иметь место равенство $m = M - (N - n)$.

Рассматривая n-поверхность (2) как геометрическое n-пространство X_n, а ее касательные n-плоскости как касательные центрально-аффинные n-пространства, ассоциированные с соответствующими точками X_n, мы получаем в X_n поле локальных m-поверхностей, определяемое уравнениями

$$x^\alpha = l^\alpha(\xi^\lambda, \eta^c). \tag{4}$$

Отсюда естественно возникает обратная задача представления произвольного поля локальных m-поверхностей в X_n как поля m-поверхностей, индуцированного данным постоянным полем в E_N на некоторой n-поверхности, или, как мы будем говорить, задача вмещения данного поля локальных n-поверхностей в X_n в данное постоянное поле поверхностей в E_N. При этом вмещение называется нормальным, если соответствующее поле m-поверхностей на n-поверхности будет нормально индуцировано. В дальнейшем, говоря о вмещении, мы будем иметь в виду нормальное вмещение.

Однако больший интерес имеет задача о вмещении, когда постоянное поле поверхностей, в которое вмещается данное поле локальных поверхностей в X_n, не дано и само подлежит определению. В дальнейшем мы будем рассматривать как раз эту задачу.

Назовем абсолютным классом данного поля локальных поверхностей в X_n такое число k, что это поле может быть вмещено в постоянное поле поверхностей в E_{n+k}, но не может быть вмещено в постоянное поле поверхностей в E_{n+k-1}. Наряду с абсолютным классом поля локальных поверхностей в X_n рассматриваются относительные классы, когда поверхности, образующие постоянные поля, в которые происходит вмещение данного поля, должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Для каждой такой системы дополнительных условий можно ввести свой класс поля локальных поверхностей в X_n. Абсолютный класс поля локальных поверхностей в X_n мы будем считать равным нулю, если в X_n можно ввести такую координатную систему, что, при надлежащей параметризации локальных поверхностей, уравнения, определяющие поле, не будут зависеть от координат ξ^α точки в X_n.

Действительно, в этом случае само X_n можно представить как область в аффинном n-пространстве и, отождествляя касательные E_n с самим этим аффинным пространством, рассматривать данное поле локальных поверхностей как постоянное поле поверхностей аффинного n-пространства.

Вмещение мы будем называть собственным, если соответствующая n-поверхность (2) не лежит ни в какой плоскости пространства E_N. Очевидно, что случай несобственного вмещения сводится к случаю собственного вмещения, если вместо самого E_N мы возьмем его плоскость, в которой лежит поверхность (2). Очевидно, что при отыскании абсолютного класса поля достаточно рассматривать собственные вмещения.

Если поле (4) собственным образом вмещается в постоянное поле (1), то можно определить M независимых функций $H^C(\xi^\lambda, \eta^c)$ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\Phi^A_\omega(\xi^\lambda)\, l^\omega(\xi^\lambda, \eta^c) = L^A(H^C(\xi^\lambda, \eta^c)). \tag{5}$$

Как известно, необходимым и достаточным условием для этого является то, что ранг матрицы

$$\left\| \Phi^A_\omega l^\omega_\alpha,\ \Phi^A_{\omega\alpha} l^\omega + \Phi^A_\omega \partial_\alpha l^\omega \right\| \tag{6}$$

должен быть равен $M = m + N - n$.

Приравнивая нулю все детерминанты порядка $M + 1$ этой матрицы, мы получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для определения функций Φ^A. Однако уравнения этой системы будут содержать произвольные параметры η^a. Дифференцируя по этим параметрам, мы получим, в общем случае, новые уравнения, которым должны удовлетворять Φ^A. Продолжая это дифференцирование по η^a и присоединяя каждый раз полученные новые уравнения к уравнениям рассматриваемой системы, мы придем, в конце концов, либо к системе уравнений, не удовлетворяющейся никакими постоянными значениями Φ^A_α, $\Phi^A_{\alpha\beta}$ при произвольных значениях η^a, и тогда данная задача вмещения, очевидно, не имеет решения, либо к системе уравнений, обладающей тем свойством, что ее дифференцирование по η^a не дает новых уравнений, не являющихся следствиями этой системы. В этом последнем случае полученная система дифференциальных уравнений может быть заменена эквивалентной ей системой дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, не содержащих параметров η^a:

$$\theta^l = (\xi^\lambda,\ \Phi^A_\alpha,\ \Phi^A_{\alpha\beta}) = 0, \tag{7}$$

и вопрос о возможности вмещения сводится к нахождению условий интегрируемости этой системы.

Для нахождения абсолютного класса данного поля локальных m-поверхностей в X_n мы должны проделать указанную процедуру, давая последовательно значения N, равные n, $n+1, \ldots$, и считая, что $M = m + N - n$. Так как ранг матрицы (6) не может превышать $m+n$, то отсюда следует, что абсолютный класс поля k не может превышать n.

Таким образом мы получаем теорему:

Теорема. *Каждое поле локальных m-поверхностей в X_n может быть вмещено в постоянное поле $m+k$-поверхностей в E_{n+k}, где $k \leqslant n$.*

Заметим, что если мы имеем некоторое вмещение данного поля локальных m-поверхностей в X_n в постоянное поле (1), осуществляемое с помощью n-поверхностей (2), то, производя в E_N общее аффинное преобразование, мы получим, что преобразованная n-поверхность определит новое вмещение рассматриваемого поля в преобразованное постоянное поле n-поверхностей. Отсюда следует, что при рассмотрении задачи о вмещении мы можем считать, что искомая n-поверхность в E_N задана только с точностью до произвольного общего аффинного преобразования в E_N с помощью соответствующих ее фундаментальных геометрических дифференциальных объектов. При этом условие того, что ранг матрицы (6) равен $M = m + N - n$, даст систему уравнений, которым должны удовлетворять компоненты соответствующих фундаментальных геометрических дифференциальных объектов, причем эти уравнения в качестве произвольных параметров будут содержать η^a. Дифференцируя эти уравнения по η^a, мы, как и в предыдущем случае, либо убедимся в невозможности данного вмещения, либо придем к системе уравнений, которая может быть заменена эквивалентной ей системой, не содержащей η^a. В этом последнем случае нам нужно присоединить к полученной системе уравнений дифференциальные соотношения, выражающие необходимые и достаточные условия того, что геометрические дифференциальные объекты данного типа являются фундаментальными геометрическими дифференциальными объектами некоторой n-поверхности в E_N, и найти условия интегрируемости полученной таким образом системы дифференциальных уравнений относительно компонент соответствующих геометрических дифференциальных объектов. Как известно ([1]), задание поля локальных центрально-простых* m-поверхностей в X_n определяет заданную внутренним образом вариационную задачу Лагранжа с $n-m-1$ дополнительными условиями в виде дифференциальных уравнений.

Легко видеть, что если это поле локальных m-поверхностей может быть вмещено в постоянное поле центрально-простых M-поверхностей в E_N, то это означает, что рассматриваемая вариационная задача Лагранжа может быть приведена к вариационной задаче, состоящей в нахождении экстремума интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} F(\dot{X}^A)\,dt \tag{8}$$

при дополнительных условиях

$$\overset{P}{f}(\dot{X}^A) = 0 \quad (P = M+2, \ldots, N), \tag{9}$$

$$\overset{h}{\varphi}(\dot{X}^A) = 0 \quad (h = n+1, \ldots, N). \tag{10}$$

При этом уравнения (10) являются неявными уравнениями n-поверхности (2), с помощью которой осуществляется данное вмещение.

Наконец, заметим, что известная задача о вмещении риманова пространства в евклидово, с нашей точки зрения, равносильна задаче о вмещении поля локальных регулярных центральных гиперквадрик в X_n, центры которых совпадают с центрами касательных пространств, в постоянное поле таких же гиперквадрик в E_N.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
10 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Вагнер, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 6, 257 (1948).

* Поверхность в центрально-аффинном пространстве называется центрально-простой, если на ней не существует двух точек, радиусы-векторы которых имеют одинаковые направления.