

Л. Н. ГУТМАН

К ТЕОРИИ ГОРНО-ДОЛИННЫХ ВЕТРОВ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 17 III 1949)

Рассмотрим движение воздуха, возникающее вследствие термических причин над рельефом, достаточно плавным, чтобы можно было применить теорию пограничного слоя, но все же не настолько, чтобы можно было принять параметрическую зависимость всех элементов движения от координаты, направленной вдоль склона*. Желая изучить движение, вызванное исключительно наклоном подстилающей поверхности (так называемый „ветер склонов“), будем считать, что температура поверхности горы всюду одна и та же. Для простоты ограничимся рассмотрением такого рельефа, при котором крутизна склонов не меняется вдоль какой-либо координаты (пусть этой координатой будет y , тогда все элементы движения не будут зависеть от y). Упрощая полную систему уравнений механики вязкой сжимаемой жидкости согласно теории конвекции⁽²⁾ и теории пограничного слоя, получим систему уравнений для локальных ветров:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \lambda \vartheta \sin \alpha + 2\omega \sin \varphi \cdot v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial v}{\partial z} + \lambda \vartheta \sin \beta - 2\omega \sin \varphi \cdot u, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \Gamma u \sin \alpha + \Gamma v \sin \beta + \Gamma \mu w &= \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \lambda \rho_0 \mu \vartheta, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\lambda = 273^{-1} g$, $\mu = \cos \alpha \cos \beta (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta)^{-1/2}$. Здесь приняты обозначения: x, y, z — ортогональные криволинейные координаты; x направлена вдоль линии рельефа, z — вверх; t — время; u, v, w — составляющие скорости ветра вдоль осей x, y, z , соответственно; ρ_0 — статическая плотность воздуха; ϑ, p — отклонения потенциальной температуры и давления от их значений в покоящейся атмосфере; g — ускорение силы тяжести; 273^{-1} град.⁻¹ — коэффициент теплового расширения воздуха; ω — угловая скорость вращения земли; φ — географическая широта места; α, β — углы между горизонтальной плоскостью и осями координат x, y , соответственно ($\beta = \text{const}$); Γ — вертикальный градиент потенциальной температуры при отсутствии движения; ν, κ — коэффициенты турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности (вопрос о распределении в пространстве этих коэффициентов при локальных ветрах в настоящее время еще совершенно не изучен; мы положим $\nu = \kappa = \text{const}$).

* Случай параметрической зависимости всех элементов движения от координаты, направленной вдоль склона, рассмотрен в (1).

Краевые условия будут следующие:

$$u = v = w = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const} \quad \text{при } z = 0,$$

$$u = v = \vartheta = p = 0 \quad \text{при } z = \infty.$$

Покажем, что специфические особенности задачи о „ветре склонов“ позволяют еще более упростить уравнения (1).

В задаче определены: характерный для данного рельефа наклон α_0 , а также характерные температура ϑ_0 и время $\pi/2\omega^*$. Остальные характерные величины находим, сравнивая члены в уравнениях (1). С помощью характерных величин переходим в уравнениях (1) к безразмерным координатам и функциям (буквы со штрихом):

$$x = \frac{\vartheta_0}{\Gamma \sin \alpha_0} x', \quad z = \sqrt[4]{\frac{\nu^2}{\lambda \Gamma \sin^2 \alpha_0}} z', \quad u = \vartheta_0 \sqrt{\frac{\lambda}{\Gamma}} u', \quad \vartheta = \vartheta_0 \vartheta',$$

$$v = \frac{\vartheta_0 2\omega \sin \varphi}{\Gamma \sin \alpha_0} v', \quad w = \sqrt[4]{\lambda \Gamma \nu^2 \sin^2 \alpha_0} w', \quad t = \frac{\pi}{2\omega} t',$$

$$p = \rho_0 \lambda \mu_0 \vartheta_0 \sqrt[4]{\frac{\nu^2}{\lambda \Gamma \sin^2 \alpha_0}} p',$$

где $\mu_0 = \cos \alpha_0 \cos \beta (1 - \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \beta)^{-1/2}$. Тогда будем иметь:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} = \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + \vartheta' \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} - m \frac{\partial p'}{\partial x'} - l \frac{\partial u'}{\partial t'} + (\pi l \sin \varphi)^2 v',$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} = \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + q \vartheta' - l \frac{\partial v'}{\partial t'} - u',$$

$$u' \frac{\partial \vartheta'}{\partial x'} + w' \frac{\partial \vartheta'}{\partial z'} + u' \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} + n v' + m w' \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial z'^2},$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{\mu}{\mu_0} \vartheta',$$

где обозначено:

$$m = \frac{\Gamma}{\vartheta_0} \sqrt[4]{\frac{\nu^2}{\lambda \Gamma \sin^2 \alpha_0}}, \quad n = \frac{2\omega \sin \varphi \sin \beta}{\sqrt{\lambda \Gamma \sin^2 \alpha_0}}, \quad l = \frac{2\omega}{\pi \sqrt{\lambda \Gamma \sin \alpha_0}}, \quad q = \frac{\sqrt{\lambda \Gamma \sin \beta}}{2\omega \sin \varphi}.$$

Наблюдения показывают, что горные ветры начинают быть заметными при достаточно больших α_0 и ϑ_0 . Если, например, $\alpha_0 > 10^\circ$ и $\vartheta_0 > 10^\circ$, то $m \approx l < 10^{-2}$. Поэтому учитывать члены, имеющие множителем m или l , не имеет смысла, ибо точность наблюдений над температурой и ветром обычно не превышает 1% .

Это означает, что: а) при изучении ветра склонов можно пренебрегать градиентом давления, возникающим из-за изменения α вдоль x , по сравнению с главной силой, которая вызывает движение воздуха, — силой Архимеда; б) явление ветра склонов — процесс квазистационарный**, и можно, не уменьшая общности, рассматривать

* Наблюдения показывают, что горные ветры имеют ярко выраженный суточный ход.

** Многие наблюдения подтверждают этот вывод. Так, А. Х. Хргиан⁽³⁾ отмечает, что горный ветер возникает на всех высотах почти одновременно.

стационарную задачу; в) в первом уравнении движения можно пренебречь силой Кориолиса*.

Чтобы еще более упростить уравнения, мы рассмотрим только тот случай, когда $|\beta| \ll |\alpha_0|$ (например: $\alpha_0 = 10^\circ$, $\beta = 1^\circ$; тогда $n = 10^{-2}$) и членом с n можно пренебречь**.

Обратимся снова к уравнениям (1). После всех упрощений будем иметь фундаментальную систему:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda \vartheta \sin \alpha, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda \vartheta \sin \beta - 2\omega \sin \varphi \cdot u, \\ u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \Gamma u \sin \alpha &= v \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \lambda \rho_0 u \vartheta, \end{aligned} \quad (3)$$

которую можно использовать при решении различных задач о горно-долинных ветрах.

Мы ограничимся рассмотрением рельефа, симметричного по x относительно некоторой точки, которой может быть, например, вершина горы или середина дна долины. В эту точку мы поместим начало координат. Тогда $\sin \alpha(x)$ можно представить в виде ряда по нечетным степеням x :

$$\sin \alpha = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \dots,$$

где $\alpha_1, \alpha_3, \dots$ — числовые коэффициенты.

Если перейти к новой переменной $\xi = (v^{-2} \lambda |\vartheta_0 \alpha_1|)^{1/4} z$ и отыскивать решение системы (3) в виде рядов по степеням x^{***} :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\lambda |\vartheta_0 \alpha_1|} \left[x f_0' + x^3 \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} f_1' + \Gamma \frac{\alpha_1}{\vartheta_0} f_2' \right) + \dots \right], \\ w &= -\sqrt[4]{\lambda |\vartheta_0 \alpha_1|} v^2 \left[f_0 + 3x^2 \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} f_1 + \Gamma \frac{\alpha_1}{\vartheta_0} f_2 \right) + \dots \right], \\ \vartheta &= \vartheta_0 \left[\tau_0 + x^2 \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \tau_1 + \Gamma \frac{\alpha_1}{\vartheta_0} \tau_2 \right) + \dots \right], \\ v &= \sqrt{\lambda \left| \frac{\vartheta_0}{\alpha_1} \right|} \sin \beta \left[v_0 + x^2 \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_2 + \Gamma \frac{\alpha_1}{\vartheta_0} v_4 \right) + \dots \right] + \\ &+ 2\omega \sin \varphi \left[x v_1 + x^3 \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3 + \Gamma \frac{\alpha_1}{\vartheta_0} v_5 \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $f_0, f_1, \dots, v_0, v_1, \dots, \tau_0, \tau_1, \dots$ — функции только ξ и штрихи обозначают дифференцирование по ξ , то, после сравнения коэффици-

* Этот вывод позволяет заключить, что для случая $\beta = 0$ можно построить гидродинамическую миниатюрную модель «ветра склонов».

** Легко видеть, что $0 < |\beta| \ll |\alpha_0|$ как раз наиболее интересный случай. Он соответствует, например, пологой долине, медленно спускающейся к морю и окруженной с двух сторон крутыми горами.

*** Сходимость рядов зависит от убывания коэффициентов $\alpha_1, \alpha_3, \dots$ и строго нами не обосновывается.

циентов при одинаковых степенях x , получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f_0''' + f_0 f_0'' - f_0'^2 \pm \tau_0 = 0, \quad \tau_0'' + f_0 \tau_0' = 0, \quad (5)$$

$$v_0'' + f_0 v_0' + \tau_0 = 0, \quad v_1'' + f_0 v_1' - f_0' v_1 = f_0', \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1''' + f_0 f_1'' - 4f_0' f_1' + 3f_0'' f_1 + v_1 = -\tau_0, \\ \tau_1'' + f_0 \tau_1' - 2f_0' \tau_1 + 3\tau_0' f_1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} v_2'' + f_0 v_2' - 2f_0' v_2 = -3f_1 v_0' - \tau_1, \\ v_3'' + f_0 v_3' - 3f_0' v_3 = f_1' v_1 - 3f_1 v_1' + f_1' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

.....

с крайевыми условиями:

$$\text{при } \xi = 0 \quad f_i = f_i' = v_i = \tau_{i+1} = 0, \quad \tau_0 = 1, \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

$$\text{при } \xi = \infty \quad f_i' = v_i = \tau_i = 0.$$

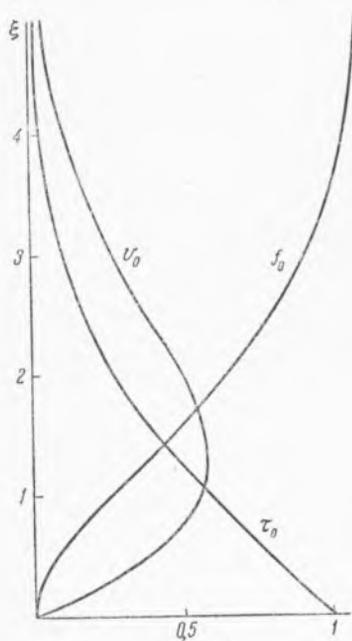


Рис. 1

Легко видеть, что f_0 и τ_0 определяются из замкнутой системы (5). Имея f_0 и τ_0 , $-v_0$ и v_1 находим из уравнений (6). Теперь можно определить f_1 и τ_1 из системы (7), а тогда v_2 и v_3 найдутся из уравнений (8) и т. д.

Поскольку уравнения (5), (6) и т. д. и крайевые условия (9) никаких переменных параметров не содержат, то последовательное интегрирование любого числа этих систем уравнений может быть выполнено каким-либо численным методом раз и навсегда.

Заметим, что знак плюс в первом уравнении из (5) соответствует случаю $\vartheta_0 \alpha_1 > 0$, знак минус — случаю $\vartheta_0 \alpha_1 < 0$.

После того как ϑ найдено, величина p легко определяется из последнего уравнения системы (3).

Автором были протабулированы несколько первых функций f_i , v_i и τ_i . Для примера приводим на рис. 1 функции $\tau_0(\xi)$, $f_0(\xi)$ и $v_0(\xi)$ для случая $\vartheta_0 \alpha_1 > 0$. Эти функции описывают вертикальное распределение температуры

и составляющих скорости над вершиной хребта ночью или же над серединой долины днем. В заключение укажем, что совершенно аналогичным образом удастся получить решение для случая рельефа, симметричного относительно вертикальной оси.

Центральный институт прогнозов
Главного управления
гидрометеорологической службы

Поступило
16 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. С. Монин, Тр. ЦИП, в. 8 (35) (1948). ² А. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1944. ³ А. Х. Хргиан, Тр. ЦАО, в. 2 (1947).