Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 15 III 1949)

Смешанная плоская задача теории упругости в случае, когда на контуре заданы нормальное смещение и касательное напряжение, для областей, конформно отображаемых на круг при помощи рациональной функции, решена Н. И. Мусхелишвили [1]. В предлагаемой работе методом, опирающимся на некоторые новые формулы плоского напряженного состояния, которые мне удалось установить, я впервые даю решение этой задачи для прямоугольника.

Пусть Γ — замкнутый контур с конечным числом угловых точек, имеющий вне этих угловых точек непрерывную кривизну и целиком лежащий внутри области тела G в плоскости $z = x + iy$, а α — угол, составленный внешней нормалью к этому контуру с осью x. Пусть ν и t — проекции смещений точек этого контура Γ на его внешнюю нормаль и, соответственно, на положительное направление касательной, и пусть N и T — нормальное и, соответственно, касательное напряжения в этих точках контура Γ. В соответствии с формулами Г. В. Колосова, имеем

$$2\mu(\nu + it) = e^{-i\alpha}[k\varphi(z) - z\overline{\varphi'}(\bar{z}) - \overline{\psi}(\bar{z})], \tag{1}$$

$$N + iT = \varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\bar{z}) - [z\overline{\varphi''}(\bar{z}) + \overline{\psi'}(\bar{z})]e^{-i2\alpha}, \tag{2}$$

где $k = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$; λ и μ — постоянные Ламэ; $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции от z, аналитические в области G; $\overline{\varphi'}(\bar{z})$, $\overline{\varphi''}(\bar{z})$, $\overline{\psi}(\bar{z})$ и $\overline{\psi'}(\bar{z})$ — функции сопряженные, соответственно, с $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$, $\psi(z)$ и $\psi'(z)$. Обозначая через s длину дуги контура Γ, отсчитываемую от некоторой его точки в направлении положительного обхода его, из равенства (1) непосредственным подсчетом получаем

$$2\mu\left(\frac{d\nu}{ds} + i\frac{dt}{ds}\right) = i\{k\varphi'(z) - \overline{\varphi'}(\bar{z}) + [z\overline{\varphi''}(\bar{z}) + \overline{\psi'}(\bar{z})]e^{-i2\alpha}\} -$$

$$- ie^{-i\alpha}[k\varphi(z) - z\overline{\varphi'}(\bar{z}) - \overline{\psi}(\bar{z})]\frac{d\alpha}{ds}.$$

Отсюда, учитывая равенства (1) и (2), получаем следующие важные формулы плоского напряженного состояния:

$$2\mu\left[\frac{dt}{ds} + \nu\frac{d\alpha}{ds} + i\left(-\frac{d\nu}{ds} + t\frac{d\alpha}{ds}\right)\right] = k\varphi'(z) - \overline{\varphi'}(\bar{z}) + [z\overline{\varphi''}(\bar{z}) + \overline{\psi'}(\bar{z})]e^{-i2\alpha}, \tag{3}$$

$$2\mu\left(\frac{dt}{ds} + \nu\frac{d\alpha}{ds}\right) + N + i\left[2\mu\left(-\frac{d\nu}{ds} + t\frac{d\alpha}{ds}\right) + T\right] = (k+1)\varphi'(z). \tag{4}$$

Если контур Г есть ломаная линия, то эти формулы принимают вид

$$2\mu\left(\frac{dt}{ds}-i\frac{d\nu}{ds}\right)=k\varphi'(z)-\overline{\varphi'}(\bar z)+[z\overline{\varphi''}(\bar z)+\overline{\psi'}(\bar z)]e^{-i2\alpha}, \qquad (5)$$

$$2\mu\frac{dt}{ds}+N+i\left(-2\mu\frac{d\nu}{ds}+T\right)=(k+1)\varphi'(z). \qquad (6)$$

Отсюда, как следствие, получаем следующие формулы:

$$\operatorname{Im}[(k+1)\varphi'(z)]=-2\mu\frac{d\nu}{ds}+T \quad (\operatorname{Im}\text{ — мнимая часть}), \qquad (7)$$

$$\operatorname{Im}[\psi'(z)e^{i2\alpha}]=T-\operatorname{Im}[\bar z\varphi''(z)e^{i2\alpha}], \qquad (8)$$

$$\operatorname{Re}[(k+1)\varphi'(z)]=2\mu\frac{dt}{ds}+N \quad (\operatorname{Re}\text{ — вещественная часть}), \qquad (9)$$

$$\operatorname{Re}[\psi'(z)e^{i2\alpha}]=\frac{4\mu}{k+1}\frac{dt}{ds}-\frac{k-1}{k+1}N-\operatorname{Re}[\bar z\varphi''(z)e^{i2\alpha}]. \qquad (10)$$

Пусть теперь область G есть прямоугольник с вершинами A, B, C и D, имеющими аффиксы $^1/_2 a$, $^1/_2 a+ib$, $-^1/_2 a+ib$ и, соответственно, $-^1/_2 a$ (a и b — положительные числа), L — его граница, а σ — длина дуги L, отсчитываемая от точки $z=0$ в положительном направлении обхода L. Пусть $\zeta=\rho e^{i\theta}=(\operatorname{sn} z-i)/(\operatorname{sn} z+i)$, где $\operatorname{sn} z$ — эллиптический синус с периодами $2a$ и $2bi$, и пусть A', B', C' и D' — точки границы круга $|\zeta|<1$, соответствующие вершинам прямоугольника A, B, C и, соответственно, D.

Найдем напряженное состояние прямоугольника G (а тем самым покажем его существование), допускающее непрерывность мнимой части функции $\varphi'(z)$ в замкнутом прямоугольнике $G+L$, для которого нормальное смещение ν и касательное напряжение T на контуре L принимают наперед заданные значения $\nu=\nu(\sigma)$, $T=T(\sigma)$, где $\nu(\sigma)$ и $T(\sigma)$ — вещественные функции от σ, которые для простоты мы будем считать удовлетворяющими следующим условиям: a) функция $\nu(\sigma)$ непрерывна на L за исключением, быть может, угловых точек, где она может иметь точки разрыва первого рода ([2]); b) функции $d\nu(\sigma)/d\sigma$ и $T(\sigma)$ непрерывны на L; c) производные $\frac{d}{d\theta}\frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma}$ и $\frac{d}{d\theta}T(\sigma)$ как функции от θ удовлетворяют условию Гельдера на окружности $|\zeta|=1$; d) в угловых точках на L имеет место равенство $T(\sigma)=0$*.

Из формулы (7) сразу же следует, что функция $\varphi'(z)$ должна определяться равенством

$$\varphi'(z)=\varphi'_0(z)+C,\quad \varphi_0'(z)=\frac{i}{2\pi(k+1)}\int_0^{2\pi}\left[-2\mu\frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma}+T(\sigma)\right]\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta, \qquad (11)$$

C — вещественная постоянная.

Дифференцируя обе части равенства (11) по z, получаем

$$\varphi_0''(z)=\frac{2i}{\pi(k+1)}\frac{d\operatorname{sn} z/dz}{(\operatorname{sn} z+i)^2}\int_\gamma\frac{-2\mu\, d\nu(\sigma)/d\sigma+T(\sigma)}{(t-\zeta)^2}dt, \qquad (12)$$

где $t=e^{i\theta}$, γ — окружность $|\zeta|=1$. Из этого равенства, учитывая условие c), в силу известных свойств производных от интеграла типа Коши ([1, 3]), видим, что функция $\varphi_0''(z)$ как функция от ζ имеет предельные значения на окружности $|\zeta|=1$, удовлетворяющие на этой окружности условию Гельдера.

* Условия b), c) и d) могут быть, несомненно, смягчены, если существование искомого напряженного состояния считать известным.

Следовательно, в силу равенства (8) для функции $\psi'(z)$ должно иметь место равенство

$$\psi'(z) = \psi_0'(z) + C', \tag{13}$$

где C' — вещественная постоянная,

$$\psi_0'(z) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\operatorname{Im}[z_\sigma \overline{\varphi_0''}(\overline{z}_\sigma)] + \delta T(\sigma)\} \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta} d\theta, \tag{14}$$

где, в свою очередь, z_σ — аффикс точки контура L, которой соответствует длина дуги σ; δ — число, равное $+1$, если точка $e^{i\theta}$ принадлежит дугам $A'B'$ и $C'D'$, и равное -1, если точка $e^{i\theta}$ принадлежит дугам $B'C'$ и $D'A'$.

Подставляя равенства (11) и (13) в формулу (5), получаем

$$2\mu\left(\frac{dv}{ds} + i\frac{dt}{ds}\right) = i\{k\varphi_0'(z) - \overline{\varphi_0'}(\overline{z}) + (k-1)C +$$

$$+ [z\overline{\varphi_0''}(\overline{z}) + \overline{\psi_0'}(\overline{z}) + C'] e^{-i2\alpha}\}. \tag{15}$$

Интегрируя теперь это равенство от точки $z=0$ до точки $z = x + iy$, принадлежащей замкнутому прямоугольнику $G + L$, вдоль контура Γ^*, состоящего из прямолинейных отрезков, по его длине дуги s, учитывая непрерывность функции $\psi_0'(z)$, как и функции $\varphi_0''(z)$, в замкнутом прямоугольнике $G + L$, получаем равенство

$$2\mu(v + it) = e^{-i\alpha}[k\varphi_0(z) - z\overline{\varphi_0'}(\overline{z}) - \overline{\psi}_0(\overline{z}) +$$

$$+ (k-1)Cz - \overline{C'}\overline{z} + 2\mu t(0) - i2\mu v(0)], \tag{16}$$

где α — угол, составленный нормалью к контуру Γ^*, остающейся справа при движении вдоль контура от точки $z=0$ до точки $z = x + iy$, с осью x; $t(0)$ — касательное смещение в точке $z=0$;

$$\varphi_0(z) = \int_0^z \varphi_0'(z)\,dz, \qquad \psi_0(z) = \int_0^z \psi_0'(z)\,dz. \tag{17}$$

Вводя обозначения $v_1 = v(^1/_2 a + {}^1/_2 b)$, $v_2 = v(a+b)$, $v_3 = v(^3/_2 a + {}^3/_2 b)$ и учитывая непрерывность функций $\varphi_0(z)$, $\varphi_0'(z)$ и $\psi_0(z)$ в замкнутом прямоугольнике, из равенства (16) для определения постоянных C, C' и $t(0)$ получаем систему линейных уравнений:

$$(k-1)\,{}^1/_2 aC - {}^1/_2 aC' + 2\mu t(0) = -\operatorname{Re}[k\varphi_0(z_1) - z_1\overline{\varphi'_0}(\overline{z}_1) - \overline{\psi}_0(\overline{z}_1)] + 2\mu v_1,$$

$$(k-1)bC + bC' =$$

$$= -\operatorname{Im}[k\varphi_0(z_2) - z_2\overline{\varphi'_0}(\overline{z}_2) - \overline{\psi}_0(\overline{z}_2)] + 2\mu v_2 - 2\mu v(0), \tag{18}$$

$$(k-1)\,{}^1/_2 aC - {}^1/_2 aC' - 2\mu t(0) =$$

$$= \operatorname{Re}[k\varphi_0(z_3) - z_3\overline{\varphi'_0}(\overline{z}_3) - \overline{\psi}_0(\overline{z}_3)] + 2\mu v_3,$$

где $z_1 = {}^1/_2 a + i\,{}^1/_2 b$, $z_2 = ib$, $z_3 = -{}^1/_2 a + i\,{}^1/_2 b$.

Из этой системы уравнений $t(0)$ и постоянные C и C' однозначно определяются, так как определитель этой системы равен $-4\mu(k-1)ab$ и, следовательно, отличен от нуля.

Таким образом, искомое напряженное состояние прямоугольника G существует и, как следует из проведенных выкладок, единственно. И если через u и v обозначить проекции смещений точек прямоугольника на ось x и, соответственно, на ось y, то для этого напряженного состояния имеют место равенства

$$2\mu(u+iv)=k\varphi_0(z)-z\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}+$$
$$+(k-1)Cz-C'\bar{z}+2\mu t(0)-i2\mu\nu(0), \tag{19}$$

$$N+iT=\varphi_0'(z)+\overline{\varphi_0'(z)}+2C-[z\overline{\varphi_0''(z)}+\overline{\psi_0'(z)}+C']e^{-i2\alpha}, \tag{20}$$

где функции $\varphi_0'(z)$, $\psi_0'(z)$, $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ определяются равенствами (11), (14) и (17), а $t(0)$ и постоянные C и C' определяются из системы линейных уравнений (18). Этим задача решена полностью.

Если, например, для простоты положить $T(\sigma)=0$, а $\nu(\sigma)=\nu_1=\mathrm{const}$ на сторонах прямоугольника AB и CD и $\nu(\sigma)=\nu_2=\mathrm{const}$ на сторонах прямоугольника BC и DA, то сразу же видим, что функции $\varphi_0'(z)$, $\psi_0'(z)$, $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ тождественно равны нулю в силу формул, их определяющих. Из системы же уравнений (18) получаем

$$t(0)=0,\quad C=\frac{2\mu}{k-1}\left(\frac{\nu_1}{a}+\frac{\nu_2}{b}\right),\quad C'=2\mu\left(\frac{\nu_2}{b}-\frac{\nu_1}{a}\right),$$

и, следовательно, формулы (19) и (20) для этого случая дают

$$u+iv=\left(\frac{\nu_1}{a}+\frac{\nu_2}{b}\right)z-\left(\frac{\nu_2}{b}-\frac{\nu_1}{a}\right)\bar{z}-i\nu_2,$$

$$N+iT=\frac{4\mu}{k-1}\left(\frac{\nu_1}{a}+\frac{\nu_2}{b}\right)-2\mu\left(\frac{\nu_2}{b}-\frac{\nu_1}{a}\right)e^{-i2\alpha}.$$

Так же просто, как и в этом примере, проводятся расчеты в случае любых заданных нормальных смещений и касательных напряжений на сторонах прямоугольника, усложняется лишь вычисление интегралов правых частей равенств (11), (14) и (17), определяющих функции $\varphi_0'(z)$, $\psi_0'(z)$, $\varphi_0(z)$ и, соответственно, $\psi_0(z)$.

Формулы (9) и (10) позволяют, по аналогии с предыдущим, находить решение смешанной задачи для прямоугольника в случае, когда на границе его заданы касательное смещение и нормальное напряжение. В сочетании же с формулами (7) и (8), по аналогии с предыдущим, они позволяют находить решения смешанных задач для прямоугольника в случае, когда на одних сторонах его задаются нормальное смещение и касательное напряжение, а на других — касательное смещение и нормальное напряжение.

Поступило
12 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, М., 1935, стр. 303—318, 234. [2] Э. Гурса, Курс математического анализа, 1, М., 1936, стр. 29. [3] И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, М., 1938, стр. 165—171.

ПОПРАВКА

В ДАН СССР № 6, т. LXIII (1948) в статье Г. Н. Положего по недосмотру автора вкрались следующие опечатки:

На стр. 616 в 30-й строке напечатано: $\theta'=\lim\limits_{0<\rho\to 0}[f(z+\rho e^{i\theta_0})-f(z)]$, следует читать: $\theta'=\lim\limits_{0<\rho\to 0}\arg[f(z+\rho e^{i\theta_0})-f(z)]$.

На стр. 618 в 16-й строке напечатано: $\left|\frac{d(\omega)}{dz}\right|-\left|\frac{d(\bar{\omega})}{dz}\right|$, следует читать: $\left|\frac{d(\omega)}{dz}\right|^2-\left|\frac{d(\bar{\omega})}{dz}\right|^2$.