Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

Член-корреспондент АН СССР П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

1. Пусть имеем две жидкости: верхнюю, для которой все определяющие ее величины обозначаются индексом (1), и нижнюю, с большей плотностью, которой соответствует индекс (2) (рис. 1).

Обозначим потенциал скорости i-й жидкости через $\bar{\varphi}_i$; давление, плотность и коэффициент фильтрации, соответственно, через p_i, ρ_i, k_i. Тогда, обозначая через z вертикальную координату, через g — ускорение силы тяжести, будем иметь

$$\bar{\varphi}_1 = -k_1\left(\frac{p_1}{\rho_1 g} + z\right),$$

$$\bar{\varphi}_2 = -k_2\left(\frac{p_2}{\rho_2 g} + z\right).$$

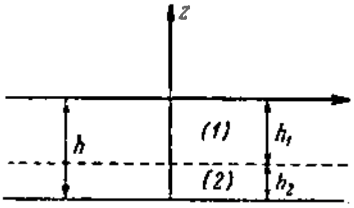

Рис. 1

На поверхности раздела этих жидкостей условие равенства давлений дает уравнение

$$z = \alpha_1\bar{\varphi}_1 - \alpha_2\bar{\varphi}_2 = \delta(x, y, t), \tag{1}$$

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{k_1(\rho_2 - \rho_1)}, \qquad \alpha_2 = \frac{\rho_2}{k_2(\rho_2 - \rho_1)}.$$

Считая поверхность слабо изменяющейся, положим $z = -h_1$ в правой части (1) и будем считать (1) уравнением свободной поверхности. Примем, что потенциал скорости $\bar{\varphi}_i$ состоит из двух частей: потенциала скорости некоторого подходящим образом выбранного установившегося движения $\varphi_i(x, y, z)$ и потенциала, осредненного по высоте соответствующего слоя, $\Phi_i(x, y, t)$, не зависящего уже от z, но зависящего от времени:

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i(x, y, z) + \Phi_i(x, y, t) \quad (i = 1, 2). \tag{2}$$

Обозначая составляющие полной скорости через $\bar{u}_i$, $\bar{v}_i$, $\bar{w}_i$, а составляющие осредненного по высоте движения через u_i, v_i, w_i, будем иметь из уравнений неразрывности:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0,$$

$$w_1 = -z\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + w_{10}, \quad w_2 = -(h + z)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + w_{20},$$

где w_{10} и w_{20} — вертикальные скорости на границах, соответственно, $z = 0$ и $z = -h$.

На поверхности раздела, при $z=\delta$, $u_i = \partial\Phi_i / \partial x$, $v_i = \partial\Phi_i / \partial y$, получим

$$\tilde{w}_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\Big|_{z=-h_1} - \delta\Delta\Phi_1 + w_{10}, \qquad \tilde{w}_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\Big|_{z=-h_1} - (h+\delta)\,\Delta\Phi_2 + w_{20},$$

$$\tilde{u}_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\Big|_{z=-h_1} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial x}, \quad \tilde{v}_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\Big|_{z=-h_1} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial y}. \tag{3}$$

Применяя линейную теорию, в (3) следует положить $\delta = -h_1$.

Дифференцируя по времени уравнение поверхности раздела $z = \delta(x, y, t)$, получим

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{\partial\delta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\delta}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = 0.$$

Заменяя $m\dfrac{dx}{dt}$, $m\dfrac{dy}{dt}$, $m\dfrac{dz}{dt}$, соответственно, на $\tilde{u}_i$, $\tilde{v}_i$, $\tilde{w}_i$, получим систему уравнений для δ, Φ_1, Φ_2:

$$m\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{\partial\delta}{\partial x}\tilde{u}_1 + \frac{\partial\delta}{\partial y}\tilde{v}_1 - \tilde{w}_1 = 0, \quad m\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{\partial\delta}{\partial x}\tilde{u}_2 + \frac{\partial\delta}{\partial y}\tilde{v}_2 - \tilde{w}_2 = 0, \tag{4}$$

$$\delta = \alpha_1\varphi_1 - \alpha_2\varphi_2 + \alpha_1\Phi_1 - \alpha_2\Phi_2,$$

куда надо подставить выражения (3).

2. Рассмотрим такую схему движения: в вертикальной плоскости между параллельными твердыми стенками находятся две жидкости, отделенные перегородкой от области питания (рис. 2). Как будет происходить движение жидкостей, если снять перегородку? Для этого случая система (5) принимает вид

Рис. 2

$$\begin{aligned} &m\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{\partial\delta}{\partial x}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \delta\Delta\Phi_1 = 0, \\ &m\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{\partial\delta}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + (h+\delta)\,\Delta\Phi_2 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\delta = \alpha_1\Phi_1 - \alpha_2\Phi_2. \tag{6}$$

Подстановка $\xi = x / \sqrt{t}$ приводит систему (5) к системе обыкновенных уравнений

$$\delta\Phi_1'' + \delta'\Phi_1' + \frac{m}{2}\xi\delta' = 0, \quad (\delta + h)\,\Phi_2'' + \delta'\Phi_2' + \frac{m}{2}\xi\delta' = 0 \tag{7}$$

с граничными условиями: при $\xi = 0$ $\delta = -h_0$, при $\xi = \infty$ $\delta = -h_1$ и соответственно выбираемыми условиями для Φ_1 и Φ_2. Систему (7) можно интегрировать численно, подобно тому, как это было сделано нами для случая фильтрации жидкости из канала в статье ([1]), где приведены графики некоторых кривых, и в статье ([2]), где число кривых увеличено.

Эксперименты в щелевой модели с одной жидкостью (глицерином) показали хорошее совпадение теории с опытом. Опыты с двумя жидкостями разной плотности показывают, что качественно картина передвижения языка более плотной жидкости совершенно аналогична той, которая имеет место для одной жидкости, вытекающей в открытый щелевой лоток.

Если мы заменим уравнения (7) линейными, положив в них $\delta = -h_1$ и отбросив произведения $\delta'\Phi_1'$, $\delta'\Phi_2'$, то получим систему

$$h_1\Phi_1'' = -h_2\Phi_2'' = \xi\delta',$$

из которой, вследствие (6), получаем для δ уравнение

$$\delta'' + \nu\xi\delta = 0, \qquad \nu = \frac{m}{2} : \left(\frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2}\right),$$

т. е. то же самое уравнение, что и для указанного движения (линейного) одной жидкости, но с другим значением коэффициента ν. Это уравнение теряет силу при $h_1 = 0$ или $h_2 = 0$ и тем точнее, чем меньше $\frac{h_0 - h_2}{h}$.

При решении системы нелинейных уравнений некоторые результаты можно получить, отыскивая решения в виде рядов по степеням некоторого параметра α. Для уравнения Буссинеска в случае притока воды к каналу это дает удобный для вычислений прием ([2]).

3. Из уравнений (4) получим линейную систему, если отбросив произведения $\frac{\partial\delta}{\partial x}\tilde{u}_1, \ldots$ и заменив в (3) δ на $-h_1$. Полагая $U = \alpha_1\Phi_1 - \alpha_2\Phi_2$, получим

$$m\frac{\partial U}{\partial t} = h_1\Delta\Phi_1 + f_1(x, y), \qquad m\frac{\partial U}{\partial t} = -h_2\Delta\Phi_2 + f_2(x, y),$$

$$f_1 = \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right|_{z=-h_1} + w_{10}, \qquad f_2 = \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_1} + w_{20}.$$

Введя обозначение $V = h_1\Phi_1 + h_2\Phi_2$, будем иметь такую систему уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\Delta U + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2, \qquad \Delta V = f_2 - f_1,$$

$$a^2 = \frac{1}{m(\alpha_1/h_1 + \alpha_2/h_2)}, \qquad \beta_1 = \frac{\alpha_1 a^2}{h_1}, \qquad \beta_2 = \frac{\alpha_2 a^2}{h_2}.$$

Уравнение свободной поверхности будет

$$z = \delta(x, y, t) = \alpha_1\varphi_1(x, y, -h_1) - \alpha_2\varphi_2(x, y, -h_1) + U(x, y, t).$$

4. В качестве простейшего примера рассмотрим линейный сток (плоская задача), к которому притекают две различные жидкости. Примем $\varphi_1 = -\frac{q}{2\pi}\ln(x^2 + y^2)$, $\varphi_2 = 0$; тогда $f_1 = \frac{q}{\pi}\frac{h_1}{x^2 + h_1^2}$.

Частное решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\Delta U + \frac{q\beta_1}{\pi}\frac{h_1}{x^2 + h_1^2}$$

возьмем в форме

$$U_0 = \frac{q\beta_1 h_1}{2\pi a^2}\ln(x^2 + h_1^2) - \frac{q\beta_1}{\pi a^2}x\,\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{h_1}.$$

Тогда уравнение линии раздела напишется так:

$$y = \alpha_1 \varphi_1 (x, -h_1) + U_0(x) + U_1(x, t).$$

Найдя $U_1(x, t)$ по начальному условию $y = -h_1 = \alpha_1\varphi_1 + U_0(x) + U_1(x, 0)$, получим уравнение линии раздела в виде:

$$y = -\frac{q\beta_1}{\pi a^2} x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{h_1} +$$

$$+ \frac{q\beta_1}{2\pi a^3 \sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \xi \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi}{h_1} \left[e^{-(x-\xi)^2/4a^2t} + e^{-(x+\xi)^2/4a^2t} \right] d\xi - h_1.$$

Соответствующая простейшая задача о притоке двух жидкостей к точечному стоку, если принять $\varphi_1(x, y, z) = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, приводит к уравнению поверхности раздела в виде

$$y = -\frac{1}{k} \left\{ \frac{q}{2\pi \sqrt{r^2 + h_1^2}} - \frac{q}{2\pi h_1} \ln\left(\sqrt{r^2 + h_1^2} + h_1\right) + \Phi_1(r, t) \right\} - h_1,$$

где

$$\Phi_1(r, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_0^\infty r' dr' \int_0^{2\pi} \Phi_1(r', 0)\, e^{-\frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}{4a^2 t}} d\theta',$$

$$\Phi_1(r, 0) = -\frac{q}{2\pi \sqrt{r^2 + h_1^2}} + \frac{q}{2\pi h_1} \ln\left(\sqrt{r^2 + h_1^2} + h_1\right).$$

Институт механики
Академии наук СССР

Поступило
12 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Я. Полубаринова-Кочина, ДАН, 63, № 6 (1948). [2] П. Я. Полубаринова-Кочина, Прикладн. матем. и мех., в. 2 (1949).