Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

М. В. ЯКОВКИН

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ПОЛИА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 III 1949)

В настоящей статье мы ставим своей целью дать обобщения одной хорошо известной теоремы Полиа [2], нашедшей отражение в некоторых учебниках высшей алгебры ([1], стр. 111).

Обозначим через R^* и R_* соответственно, верхнюю и нижнюю границы вещественных частей корней рассматриваемой целой рациональной функции.

Лемма 1. *Для всякого полинома $f(x)$ с вещественными коэффициентами имеют место неравенства*

$$|f(x_0)| < |f(x_0+2h)|, \text{ если } x_0 \geqslant R^* - h, \tag{I}$$

$$|f(x_0)| > |f(x_0+2h)|, \text{ если } x_0 \leqslant R_* - h. \tag{II}$$

Доказательство. Обозначив через a_0 старший коэффициент, через γ_f и $\alpha_f \pm \beta_f i$, соответственно, вещественные и комплексные корни рассматриваемой целой рациональной функции $f(x)$, мы вправе написать следующее равенство:

$$f(x) = a_0 \prod_f (x-\gamma_f) \prod_f [(x-\alpha_f)^2 + \beta_f^2], \tag{1}$$

откуда при $x = x_0$ и $x = x_0 + 2h$ получаем:

$$|f(x_0)| = |a_0| \prod_f |x_0 - \gamma_f| \prod_f |(x_0-\alpha_f)^2 + \beta_f^2|, \tag{2}$$

$$|f(x_0+2h)| = |a_0| \prod_f |x_0 + 2h - \gamma_f| \prod_f |(x_0+2h-\alpha_f)^2 + \beta_f^2|. \tag{3}$$

В дальнейшем, для краткости, будем вести рассуждения, исходя из простых геометрических соображений.

В случае $x_0 + h > R^*$ все точки γ_f и α_f на вещественной оси лежат ближе к точке x_0, чем к точке x_0+2h, и, следовательно, расстояния $|x_0-\gamma_f|$ и $|x_0-\alpha_f|$ всех точек γ_f и α_f до точки x_0 будут меньше, чем расстояния $|x_0+2h-\gamma_f|$ и $|x_0+2h-\alpha_f|$ соответствующих точек γ_f и α_f до точки x_0+2h. Но тогда каждый сомножитель $|x_0-\gamma_f|$ и $|(x_0-\alpha_f)^2+\beta_f^2|$ правой части равенства (2) меньше соответствующего сомножителя $|x_0+2h-\gamma_f|$ и $|(x_0+2h-\alpha_f)^2+\beta_f^2|$ правой части равенства (3) и, значит, мы вправе заключить, что в этом случае для левых частей (2) и (3) имеет место неравенство:

$$|f(x_0)| < |f(x_0+2h)|. \tag{4}$$

В случае $x_0 + h < R_*$ подобные же рассуждения приводят к неравенству:

$$|f(x_0)| > |f(x_0+2h)|. \tag{5}$$

Из доказанного при $x_0 = k - 1$ и $h = 1/2$ вытекает лемма, приведенная в (1) (стр. 109).

Теорема 1. *Если целые числа k_1 и k_2 удовлетворяют условиям:*

$$k_1 \geqslant R^* - k_2/2, \quad f(k_1) \neq 0, \quad f(k_1 + k_2) \text{ — простое число} \tag{I}$$

или

$$k_1 \leqslant R_* - k_2/2, \quad f(k_1 + k_2) \neq 0, \quad f(k_1) \text{ — простое число,} \tag{II}$$

то целочисленный полином $f(x)$ неприводим в поле рациональных чисел.

Доказательство. Допустим, что $f(x)$ приводим, т. е. допустим, что существуют по крайней мере два целочисленных полинома $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ненулевой степени, удовлетворяющие равенству:

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x). \tag{6}$$

Случай I. Из условия теоремы $f(k_1) \neq 0$ и из равенства (6) следуют:

$$\varphi(k_1) \neq 0, \qquad \psi(k_1) \neq 0. \tag{7}$$

Но, так как $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — целочисленные полиномы, то $\varphi(k_1)$ и $\psi(k_1)$ целые числа и притом отличные от нуля (7). Отсюда эти целые числа должны удовлетворять соотношениям:

$$|\varphi(k_1)| \geqslant 1, \qquad |\psi(k_1)| \geqslant 1. \tag{8}$$

Из первой части только что доказанной леммы при $x_0 = k_1$ и $h_2 = k_2/2$ для каждой из функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ получаем неравенства:

$$|\varphi(k_1)| < |\varphi(k_1 + k_2)|, \qquad |\psi(k_1)| < |\psi(k_1 + k_2)|. \tag{9}$$

Из соотношений (8) и (9) непосредственно следуют неравенства:

$$|\varphi(k_1 + k_2)| > 1, \qquad |\psi(k_1 + k_2)| > 1. \tag{10}$$

При $x = k_1 + k_2$ равенство (6) дает:

$$|f(k_1 + k_2)| = |\varphi(k_1 + k_2)|\,|\psi(k_1 + k_2)|. \tag{11}$$

Сопоставляя неравенства (10) с равенством (11), мы видим, что число $f(k_1 + k_2)$ не простое, а это противоречит условию теоремы.

Аналогичными рассуждениями теорема доказывается и в случае II.

Из первой половины этой теоремы при $k_1 = k - 1$ и $k_2 = 1$ мы получаем точную формулировку теоремы Полиа (1).

Лемма 2. *Для всякого целочисленного полинома $f(x)$ n-й степени при рациональных значениях p_1/q_1 и p_2/q_2 имеют место следующие неравенства:*

$$\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| < \left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right)\right|, \text{ если } \frac{p_1}{q_1} \geqslant R^* - \frac{p_2}{2q_2}; \tag{I}$$

$$\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)\right| > \left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|, \text{ если } \frac{p_1}{q_1} \leqslant R_* + \frac{p_2}{2q_2}. \tag{II}$$

Эта лемма легко получается из предыдущей леммы при рациональных значениях $x_0 = p_1/q_1$ и $h = p_2/2q_2$ (I); $x_0 = p_1/q_1 - p_2/q_2$ и $h = p_2/2q_2$ (II) умножением обеих частей полученных неравенств на $|[q_1q_2/(q_1;q_2)]^n|$.

Теорема 2. *Если целочисленный полином $f(x)$ n-й степени имеет делителя $\varphi(x)$ m-й степени из поля рациональных чисел и $|q^n_1 f(p_1/q_1)| > P^2$ $(P \geqslant 0)$, то целое число*

$$\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1} \pm \frac{p_2}{q_2}\right) \qquad \begin{array}{lr} (+,\ \textit{если}\ p_1/q_1 \geqslant R^* - p_2/2q_2) & \text{(I)} \\ (-,\ \textit{если}\ p_1/q_1 \leqslant R_* + p_2/2q_2). & \text{(II)} \end{array}$$

должно иметь, по крайней мере, одного делителя, по модулю превышающего

$$(P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;q_2)}\right|^m \quad \textit{или} \quad (P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;q_2)}\right|^{n-m}.$$

Доказательство. По условию теоремы целочисленный полином $f(x)$ имеет делителя $\varphi(x)$, следовательно, существует еще один полином $\psi(x)$ из поля рациональных чисел, удовлетворяющий тождеству:

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x). \tag{12}$$

Тогда, по известной лемме Гаусса, должно иметь место аналогичное тождество

$$f(x) = \varphi_0(x)\,\psi_0(x) \tag{13}$$

и для целочисленных полиномов $\varphi_0(x)$ степени m и $\psi_0(x)$ степени $n-m \geqslant 1$.

Из условия теоремы $|q_1^n f(p_1/q_1)| > P^2$ и из тождества (13) следует

$$\left|q_1^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| > P \quad \text{или} \quad \left|q_1^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| > P. \tag{14}$$

Но так как полиномы $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ целочисленные и в силу (14), мы можем написать следующие соотношения:

$$\left|q_1^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| \geqslant P+1 \quad \text{или} \quad \left|q_1^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| \geqslant P+1, \tag{15}$$

или, после умножения обеих частей соответственно на $|q_2/(q_1;q_2)|^m$ и $|q_1/(q_1;q_2)|^{n-m}$,

$$\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| \geqslant (P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;q_2)}\right|^m$$

или

$$\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| \geqslant (P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;q_2)}\right|^{n-m}. \tag{16}$$

Случай I. Применяя лемму 2 к каждой из целочисленных функций $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ по отдельности, мы получим неравенства:

$$\begin{gathered} \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|, \\ \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|. \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда из (16) и (17) непосредственно вытекают неравенства:

$$\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > (P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;q_2)}\right|^m$$

или (18)

$$\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > (P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;q_2)}\right|^{n-m}.$$

Положив в тождестве (13) $x = p_1 / q_1 + p_2 / q_2$ и умножив обе части полученного на $\left|\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right|^n = \left|\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right|^m \left|\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right|^{n-m}$, мы находим:

$$\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right)\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{p_1} + \frac{p_2}{q_2}\right)\right| \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right)\right|. \tag{19}$$

Сопоставляя неравенства (18) с равенством (19), мы видим, что число $\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right)$ имеет по крайней мере одного целого делителя, по модулю превышающего

$$(P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1; q_2)}\right|^m \quad \text{или} \quad (P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1; q_2)}\right|^{n-m}.$$

Случай II. Применяя лемму 2 к каждому из целочисленных полиномов $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ по отдельности, мы получим неравенства:

$$\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)\right| > \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|,$$

$$\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)\right| > \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|. \tag{20}$$

Тогда из (16) и (20) непосредственно вытекают неравенства:

$$\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)\right| > (P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1; q_2)}\right|^m$$

или (21)

$$\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)\right| > (P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1; q_2)}\right|^{n-m}.$$

Положив в тождестве (13) $x = p_1 / q_1 - p_2 / q_2$ и умножив обе части полученного на $\left|\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right|^n = \left|\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right|^m \left|\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right|^{n-m}$, мы находим:

$$\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)\right| \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)\right|. \tag{22}$$

Сопоставляя неравенства (21) с равенством (22), мы видим, что целое число $\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1; q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)$ имеет по крайней мере одного делителя, по модулю превышающего

$$(P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1; q_2)}\right|^m \quad \text{или} \quad (P+1)\left|\frac{q_2}{(q_1; q_2)}\right|^{n-m}.$$

Таким образом, теорема доказана для обоих случаев.

Из первой части этой теоремы, как частный случай, при $P = 0$, $p_1 = k - 1$, $p_2 = q_1 = q_2 = 1$ также вытекает упомянутая выше теорема Полиа (²).

Поступило
2 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Шапиро, Высшая алгебра, 1938. [2] Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, 2, 1937.