Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

М. М. ПОСТНИКОВ

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 III 1949)

При классификации отображений трехмерного комплекса в двухмерную сферу Л. С. Понтрягин (1) использовал некоторые цепи комплекса, определенные непрерывными отображениями этого комплекса в сферу. Это определение было перенесено Эйленбергом (2) на случай отображений произвольного комплекса в связное топологическое пространство, удовлетворяющее определенным требованиям (так называемой простоты в нужных размерностях). Однако для изучения отображений в произвольные пространства или хотя бы в полиэдры необходимо избавиться от этих требований. Этой цели и посвящена настоящая заметка. Построенные здесь цепи определены не над одной группой, а над так называемой системой локальных групп (3). Поэтому вначале я вкратце с некоторыми добавлениями изложу теорию гомологий с локальными коэффициентами.

А. Пусть X — связное (с помощью путей) топологическое пространство. Через α_z^x, β_z^x, ... мы обозначим пути, соединяющие точки z, $x \in X$. Пусть каждой точке $x \in X$ отнесена абелева группа G_x и пусть каждому пути α_z^x отнесен изоморфизм $\breve{\alpha}_z^x$ группы G_x на группу G_z, подчиненный следующим условиям: 1) если пути α_z^x и β_z^x гомотопны, то соответствующие изоморфизмы $\breve{\alpha}_z^x$ и $\breve{\beta}_z^x$ тождественны; 2) произведению $\alpha_z^y\alpha_y^x$ путей соответствует произведение изоморфизмов: $\widetilde{\alpha_z^y\alpha_y^x} = \breve{\alpha}_z^y\breve{\alpha}_y^x$. Систему $\mathfrak{G} = \{G_x, \breve{\alpha}_z^x\}$ групп G_x и изоморфизмов $\breve{\alpha}_z^x$ назовем системой локальных групп пространства X.

Пусть в X даны две системы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}' = \{G_x', \breve{\alpha}_z'^x\}$ локальных групп и пусть для каждого $x \in X$ задан такой гомоморфизм α_x группы G_x в группу G_x', что $\alpha_y\breve{\alpha}_y^x = \breve{\alpha}_y'^x\alpha_x$. Систему α всех гомоморфизмов α_x назовем гомоморфизмом системы $\mathfrak{G}$ в систему $\mathfrak{G}'$. Если все α_x являются изоморфизмами, то гомоморфизм α также назовем изоморфизмом.

Б. Пусть X и Y — связные топологические пространства и пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y. Пусть в пространстве Y дана система локальных групп $\mathfrak{G} = \{G_y, \breve{\alpha}_z^y\}$. Каждой точке $x \in X$ отнесем группу $G_{f(x)}$. Каждому пути α_z^x пространства X соответствует путь $f(\alpha_z^x)$, соединяющий точки $f(z)$, $f(x) \in Y$. Поставим в соответствие пути α_z^x изоморфизм $\widetilde{f(\alpha_z^x)}$ группы $G_{f(x)}$ на группу $G_{f(z)}$. Таким образом, мы в пространстве X получили систему $f^*\mathfrak{G} = \{G_{f(x)}, \widetilde{f(\alpha_z^x)}\}$.

Пусть два отображения f и g пространства X в пространство Y гомотопны. Гомотопия, их связывающая, однозначно определяет естественное изоморфное отображение системы $f^*\mathfrak{G}$ на систему $g^*\mathfrak{G}$.

В. Пусть топологическое пространство X разбито на клетки, образующие клеточный комплекс K. Предположим, что замыкание каждой клетки односвязно. q-мерные ориентированные клетки будем обозначать через σ^q, коэффициенты инцидентности через $[\sigma^{q+1}:\sigma^q]$. В замыкании клетки σ выберем точку $x(\sigma)$, называемую представителем клетки σ. Символы $G_{x(\sigma)}$, $\alpha_{x(\tau)}^{x(\sigma)}$, $\tilde{\alpha}_{x(\tau)}^{x(\sigma)}$ сократим до G_σ, α_τ^σ, $\tilde{\alpha}_\tau^\sigma$. Пусть клетка τ является гранью клетки σ. В замыкании σ клетки σ выберем какой-нибудь путь α_σ^τ. Изоморфизм $\tilde{\alpha}_\sigma^\tau$ не зависит от пути α_σ^τ, так как замыкание клетки σ односвязно. q-мерной цепью f^q над системой $\mathfrak{G}=\{G_x, \tilde{\alpha}_z^x\}$ назовем нечетную функцию ориентированной q-мерной клетки, относящую клетке σ^q элемент $f^q(\sigma^q)$ группы $\mathfrak{G}_{\sigma^q}$. Положим

$$\nabla_{\mathfrak{G}} f^q(\sigma^{q+1}) = \sum_{\sigma^q \in K} [\sigma^{q+1}:\sigma^q]\, \tilde{\alpha}_{\sigma^{q+1}}^{\sigma^q}(f^q(\sigma^q)).$$

Легко видеть, что $\nabla_{\mathfrak{G}}\nabla_{\mathfrak{G}}=0$, так что можно обычным путем построить теорию $\nabla_{\mathfrak{G}}$-гомологий.

Любому изоморфизму α систем $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$ следующим образом соответствует изоморфизм, также обозначаемый через α, групп цепей над системами $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$:

$$(\alpha f^q)(\sigma^q) = \alpha_{\sigma^q}(f^q(\sigma^q)).$$

Легко видеть, что $\nabla_{\mathfrak{G}'}\alpha = \alpha\nabla_{\mathfrak{G}}$, так что α переводит циклы в циклы а циклы, гомологичные нулю, в циклы, гомологичные нулю.

Г. Важнейшим примером системы локальных групп пространства Y служит система гомотопических групп $\pi_y^p(Y)$ некоторой размерности $p>1$; $y \in Y$ есть „начало“, относительно которого построена группа. Путям α_t^y соответствуют известные изоморфизмы, используемые, например, в доказательстве „независимости гомотопических групп от начальной точки“ ([4]). Для этой системы мы примем обозначение Π^p. Для системы $\mathfrak{G}=f^*\Pi^p$ пространства X (см. Б) мы вместо $\nabla_{\mathfrak{G}}$ будем писать ∇_f.

Д. В **симплициальном** комплексе теории гомологий с локальными коэффициентами можно придать более удобный вид. Для этого мы используем теорию цепей над неабелевыми группами, развитую Роббинсом ([5]).

Пусть K — симплициальный комплекс. Символом $x_0x_1\ldots x_p$ мы обозначаем ориентированный p-мерный симплекс в K с вершинами $x_0, x_1, \ldots, x_p$, ориентация которого задается указанным порядком вершин. p-мерной цепью комплекса K над мультипликативной, вообще говоря, неабелевой группой A мы назовем такую функцию p-мерного ориентированного симплекса из K со значениями в A, что при изменении ориентации значение функции переходит в обратное. Одномерная цепь a^1 над A называется **циклом**, если для любого двумерного симплекса $x_0x_1x_2$ из K

$$a^1(x_0x_1)\,a^1(x_1x_2)\,a^1(x_2x_0)=1.$$

Два одномерных цикла a^1 и b^1 называются гомологичными между собой, если существует такая нульмерная цепь a^0 над A, что

$$a^1(x_0x_1)=(a^0(x_0))^{-1}b^1(x_0x_1)\,a^0(x_1)$$

для любого симплекса x_0x_1 из K. В записи: $a^1:b^1=\nabla a^0$ или $a^1 \sim b^1$. Отношение гомологичности рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что совокупность одномерных циклов распадается на гомологические классы.

Е. Пусть A является группой левых операторов абелевой группы G. q-мерной цепью комплекса K над группой G называется, как обычно, нечетная функция q-мерного ориентированного симплекса из K со значениями в G. Зададим в K некоторый фиксированный порядок вершин и при помощи его поставим в соответствие каждому одномерному циклу a^1 над A операцию ∇_{a^1}, определяемую соотношением

$$\nabla_{a^1} c^q (x_0 x_1 \ldots x_{q+1}) = a^1 (x_0 x_1)\, c^q (x_1 \ldots x_{q+1}) + \\ + \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^k c^q (x_0 \ldots x_{k-1} x_{k+1} \ldots x_{q+1}).$$

Здесь c^q есть произвольная q-мерная цепь над G, а $x_0 \ldots x_{q+1}$ — произвольный ориентированный $(q+1)$-мерный симплекс из K, записанный так, что x_0 предшествует всем остальным его вершинам $x_1, \ldots, x_{q+1}$ относительно заданного в K порядка вершин. Легко видеть, что $\nabla_{a^1}\nabla_{a^1} = 0$, так что можно повторить относительно цикла a^1 построения обычной теории гомологий. Легко видеть, что эта теория является лишь иной формой теории гомологий с локальными коэффициентами.

Пусть a^0 — нульмерная цепь из K над A, тогда операция $c^q \to a^0 c^q$, определенная формулой $a^0 c^q (x_0 \ldots x_q) = a^0 (x_0)\, c^q (x_0 \ldots x_q)$, где x_0 предшествует всем остальным x_i, является автоморфизмом группы q-мерных цепей комплекса K над группой G. Легко видеть, что если $a^1 : b^1 = \nabla a^0$, то $\nabla_{b^1} a^0 c^q = a^0 \nabla_{a^1} c^q$, так что автоморфизм a^0 переводит гомологии относительно a^1 в гомологии относительно b^1.

Ж. Отображение комплекса K в пространство Y называется нульнормальным, если все вершины комплекса отображаются в фиксированную точку $*$ пространства Y. Очевидно, что любое отображение гомотопно нульнормальному, так что в вопросах классификации достаточно рассматривать лишь нульнормальные отображения.

Нульнормальное отображение f отображает каждый одномерный симплекс $x_0 x_1$ из K в замкнутый путь пространства Y с началом в точке $*$. Элемент фундаментальной группы $\pi_*^1(Y)$ пространства Y в точке $*$, соответствующий этому пути, обозначим через $a_f^1(x_0 x_1)$. Цепь a_f^1 оказывается циклом и называется ф у н д а м е н т а л ь н ы м ц и к л о м отображения f. Отображение f называется принадлежащим циклу a_f^1. Известно, что $\pi_*^1(Y)$ может рассматриваться как группа операторов группы $\pi_*^p(Y)$ (при $p > 1$). Следовательно, определена операция $\nabla_{a_f^1}$. Оказывается, что она совпадает с операцией ∇_f.

Фундаментальные циклы гомотопных отображений гомологичны между собой, так что каждому гомотопическому классу отображений соответствует определенный гомологический класс одномерных циклов над группой $\pi_*^1(Y)$. Цепь, осуществляющая эту гомологию, естественным образом определяется нульнормальной гомотопией, связывающей отображения, а автоморфизм, соответствующий этой нульмерной цепи, совпадает с изоморфизмом, указанным в пункте Б.

З. Вернемся теперь к клеточным комплексам. Общее понятие клетки для нас слишком широко, мы сузим его, определив ячейки. q-мерная клетка с односвязным замыканием называется я ч е й к о й, если можно задать отображение q-мерного замкнутого куба на ее замыкание, гомеоморфно отображающее на нее внутренность куба. Если все клетки клеточного комплекса K являются ячейками, то комплекс мы назовем я ч е е ч н ы м. Представителя ячейки всегда будем выбирать среди ее вершин.

Через K^p мы обозначим подкомплекс комплекса K, состоящий из всех его ячеек размерности $\leqslant p$. Будем далее считать, что $p > 1$.

И. Пусть f — отображение подкомплекса K^p в пространство Y и пусть σ^{p+1} — $(p+1)$-мерная ориентированная ячейка комплекса K, а φ — предусмотренное в З, сохраняющее ориентацию отображение ориентированного куба E^{p+1} с границей S^p на замыкание ячейки σ^{p+1}. Выбрав среди φ-прообразов представителя ячейки σ^{p+1} одну точку, примем ее за полюс сферы S^p. Отображение $f\varphi \mid S^p$ поляризованной сферы S^p определяет элемент $c_f^{p+1}(\sigma^{p+1})$ группы $\pi^p_{f(x(\sigma^{p+1}))}$, не зависящий от φ. Цепь c_f^{p+1} над системой $f^*\Pi^p$ назовем **препятствием продолжению** отображения f.

Легко видеть, что: 1) $\nabla_f c_f^{p+1} = 0$. 2) Если f гомотопно g и α — соответствующий изоморфизм системы $g^*\Pi^p$ на систему $f^*\Pi^p$, то $c_f^{p+1} = \alpha c_g^{p+1}$. 3) Если $f \mid K^{p-1}$ гомотопно $g \mid K^{p-1}$ и α — соответствующий изоморфизм системы $g^*\Pi^p$ на систему $f^*\Pi^p$, то $c_f^{p+1} \sim \alpha c_g^{p+1}$. 4) Если c^{p+1} — любой цикл над $f^*\Pi^p$, гомологичный циклу c_f^{p+1}, то существует такое отображение g, совпадающее с f на K^{p-1}, что $c_g^{p+1} = c^{p+1}$. 5) $c_f^{p+1} = 0$ тогда и только тогда, когда отображение f может быть продолжено до отображения комплекса K^{p+1}. 6) $c_f^{p+1} \sim 0$ тогда и только тогда, когда отображение $f \mid K^{p-1}$ комплекса K^{p-1} продолжаемо до отображения комплекса K^{p+1}.

К. Пусть отображения f и g комплекса K^p совпадают на K^{p-1}. Тогда $f^*\mathfrak{G} = g^*\mathfrak{G}$ для любой системы $\mathfrak{G}$ в Y.

Пусть σ^p — ориентированная ячейка из K^p и пусть φ — предусмотренное в З отображение ориентированного куба E^p, поляризованного, как в пункте И, с сохранением ориентации, отображающее этот куб на замыкание ячейки σ^p. Пусть ι — гомеоморфное отображение ориентированного куба E^p на другой ориентированный куб $\mathcal{E}^p$, обращающее ориентацию. Отождествим границы этих кубов так, чтобы точка x границы куба E^p совместилась с точкой $\iota(x)$. После отождествления мы получим p-мерную поляризованную сферу $S^p = E^p \cup \mathcal{E}^p$. Если $x \in E^p$, положим $F(x) = f(\varphi(x))$; если $x \in \mathcal{E}^p$, положим $F(x) = g(\varphi(\iota^{-1}(x)))$.

Очевидно, что F является однозначным непрерывным отображением поляризованной сферы S^p в пространство Y. Соответствующий элемент группы $\pi^p_{f(x(\sigma^p))}$ обозначим через $d^p_{f,g}(\sigma^p)$. Цепь $d^p_{f,g}$ над $f^*\Pi^p$ назовем цепью, **отличающей** f от g.

Легко видеть, что: 1) $\nabla_f d^p_{f,g} = c_f^{p+1} - c_g^{p+1}$. 2) $d^p_{f,g} + d^p_{g,h} = d^p_{f,h}$. 3) Для любого отображения $f: K^p \to Y$ и любой цепи d^p над $f^*\Pi^p$ существует такое отображение $g: K^p \to Y$, совпадающее с f на K^{p-1}, что $d^p_{f,g} = d^p$. 4) $d^p_{f,g} = 0$ тогда и только тогда, когда f гомотопно g относительно K^{p-1}. 5) $d^p_{f,g} \sim 0$ тогда и только тогда, когда f гомотопно g относительно K^{p-2}.

Поступило
14 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, Матем. сб., 9: 2, 331 (1941). [2] S. Eilenberg, Ann. of Math., 41, 231 (1940). [3] N. Steenrod, Ann. of Math., 44, 630 (1943). [4] В. А. Рохлин, Усп. матем. наук, нов. сер., 1, в. 5—6, 175 (1946). [5] H. Robbins, Trans. Am. Math. Soc., 49: 2, 308 (1941).