Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

И. Ф. ЛОХИН

К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 III 1949)

1. А. О. Гельфондом ([1]) подробно исследована проблема представления целой функции $F(z)$ первого порядка нормального типа, когда заданы некоторые функционалы, связанные с коэффициентами разложения Тейлора целой функции.

Им получено представление целой функции $F(z)$ в виде ряда, расположенного по полиномам, равномерно сходящегося во всякой ограниченной замкнутой области плоскости z при ограничениях на рост $F(z)$, необходимых для единственности целой функции. Коэффициенты этого разложения с любой степенью точности апроксимируются через интерполяционные данные.

Из результатов А. О. Гельфонда, как следствие, получается представление целой функции при следующих интерполяционных данных

$$\Delta^n F(0) \ (n=0,1,2,\ldots); \qquad \Delta^n F_n \ (n=0,1,2,\ldots);$$
$$F^n(n) \ (n=0,1,2,\ldots), \tag{1}$$

причем представление с помощью, например, интерполяционных рядов Ньютона и Абеля, т. е. рядов вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n F(0)\, P_n(z), \qquad P_n(z)=\frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}, \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F^n(n)\, Q_n(z), \qquad Q_n(z)=\frac{z(z-n)^{n-1}}{n!}, \tag{2'}$$

получается только при ограничениях на рост целой функции более сильных, чем это необходимо для единственности. Например, для случая, когда заданы числа $F(n)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ или, что все равно, $\Delta^n F(0)$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $F(z)$ однозначно определяется, если функция $f(z)$, ассоциированная по Борелю с $F(z)$, имеет все особенности внутри области, ограниченной кривыми $y=\varphi(x)$ и $y=2\pi+\varphi(x)$, где $\varphi(z)$ однозначная непрерывная функция для $-\infty\leqslant x\leqslant+\infty$. Ряд же Ньютона (2) будет сходиться к $F(z)$ тогда, когда особенности $f(z)$ будут лежать в области однолистности e^z и ограниченной кривой $|e^z-1|=1$. Если последнее условие не будет выполнено, ряд Ньютона будет, вообще говоря, всюду расходиться.

В настоящей заметке дается иное представление целой функции $F(z)$, в которое интерполяционные данные входят непосредственно и которое можно рассматривать как метод суммирования расходящихся рядов, например, рядов Ньютона, Абеля и др.

2. Основная теорема. *Пусть функция $F(z)$ — целая первого порядка нормального типа и $f(z)$ — функция, ассоциированная с $F(z)$ по Борелю. Допустим, далее, что заданы функционалы*

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C [u(\zeta)]^n f(\zeta)\, d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где $u(z)$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, — регулярная однолистная функция в конечной или бесконечной односвязной области D, отображающая D на звездообразную относительно начала область, а замкнутый контур C лежит внутри D и содержит внутри себя все особые точки $f(z)$.

Тогда имеет место представление функции $F(z)$:

$$F(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu C_{n\nu} P_\nu(z), \tag{4}$$

где $C_{n,\nu}$ — постоянные числа, не зависящие от $F(z)$ и $u(z)$, а $P_\nu(z)$ — полиномы, определяемые формулой:

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u'(\zeta)\, e^{z\zeta}}{[u(\zeta)]^{\nu+1}}\, d\zeta = \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{d\zeta^\nu}\left\{\frac{u'(\zeta)}{[u(\zeta)]^{\nu+1}}\zeta^{\nu+1} e^{z\zeta}\right\}\Bigg|_{\zeta=0}, \tag{5}$$

причем сходимость будет равномерной в любой ограниченной области плоскости z.

Доказательство. Пусть C и C' такие содержащиеся в D контуры, что C охватывает C', внутри C' содержатся все особенности $f(z)$ и функция $w = u(z)$ отображает области, ограниченные, соответственно, контурами C и C', на звездообразные области относительно начала. Обозначим через η точку контура C'.

Рассмотрим интегральное представление $e^{z\eta}$. Из однолистности функции $w = u(\zeta)$ в области D следует:

$$e^{z\eta} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u'(\zeta)}{u(\zeta) - u(\eta)}\, e^{z\zeta}\, d\zeta. \tag{6}$$

Пользуясь методом суммирования Миттаг-Леффлера, получим:

$$\frac{1}{u(\zeta) - u(\eta)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu}\frac{[u(\eta)]^\nu}{[u(\zeta)]^{\nu+1}}, \tag{7}$$

причем сходимость будет равномерной относительно η и ζ, во всяком случае, лежащих на кривых C и C'. Из (6) и (7) будем иметь:

$$e^{z\eta} = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu}[u(\eta)]^\nu P_\nu(z), \tag{8}$$

где полиномы $P_\nu(z)$ определяются формулами (5) и сходимость будет равномерной в любой ограниченной области плоскости z. Умножая равенство (8) на $\frac{1}{2\pi i} f(\eta)$ и интегрируя по контуру C', получим (4).

Таким образом, теорема доказана.

Для дальнейшего полиномам $P_\nu(z)$ удобно дать другое представление.

Обозначим через $\zeta = v(w)$ функцию, обратную $w = u(\zeta)$. Пусть Γ — контур, в который преобразуется контур C с помощью функции $w = u(\zeta)$. Тогда из (5) получаем:

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{zv(w)}}{w^{\nu+1}}\,dw = \frac{1}{\nu!}\,\frac{d^\nu}{dw^\nu}\left[e^{zv(w)}\right]\Big|_{w=0}. \tag{9}$$

Заметим, что если $w = u(\zeta)$ отображает область D на круг $|w| < \rho$, то, очевидно, нет необходимости пользоваться суммированием Миттаг-Леффлера, и для функции $F(z)$ получается представление в виде ряда:

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu\, P_\nu(z). \tag{10}$$

3. В заключение приведем некоторые частные случаи.

А. Пусть функция $u(\zeta) = e^\zeta - 1$. Она отображает полосу $-\pi < \operatorname{Im}(\zeta) < +\pi$ на звездообразную относительно начала область; плоскость с разрезом от точки -1 до ∞. Допустим, что $f(z)$ имеет все свои особенности внутри указанной полосы. Функционалы A_n здесь будут: $A_n = \Delta^n F(0)$. Полиномы $P_\nu(z)$, согласно формуле (9), будут иметь вид:

$$P_\nu(z) = \frac{1}{\nu!}\,\frac{d^\nu}{dw^\nu}\left[(1+w)^z\right]\Big|_{w=0} = \frac{z(z-1)\ldots(z-\nu+1)}{\nu!}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае для $F(z)$ будем иметь представление:

$$F(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \Delta^\nu F(0)\, c_{n\nu}\,\frac{z(z-1)\ldots(z-\nu+1)}{\nu!}. \tag{11}$$

В случае, когда особые точки $f(z)$ лежат внутри области G, ограниченной кривой $|e^z - 1| = 1$, представление (11) заменяется рядом Ньютона: $F(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \Delta^\nu\, F(0)\,\frac{z(z-1)\ldots(z-\nu+1)}{\nu!}$. Если же особые точки $f(z)$ не лежат внутри G, то ряд Ньютона вообще будет расходиться. Поэтому в этом случае на выражение (11) можно смотреть, как на суммирование расходящегося интерполяционного ряда Ньютона.

Б. Пусть $u(\zeta) = \zeta e^\zeta$. Эта функция конформно отображает область D в плоскости ζ, ограниченную кривой $r = \frac{\pi - |\varphi|}{\sin|\varphi|}$, $-\pi < \varphi < +\pi$, $\zeta = re^{i\varphi}$, на разрезанную от точки $-e^{-1}$ вдоль отрицательной части действительной оси до бесконечности плоскость w.

Допустим, что $f(z)$ имеет особенности только внутри указанной области D. Для данного случая $A_\nu = F^\nu(\nu)$ и $P_\nu(z) = \frac{z(z-\nu)^{\nu-1}}{\nu!}$.

Поэтому получаем представление для $F(z)$ в виде:

$$F(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \Delta^\nu F^{(\nu)}(\nu)\, c_{n\nu}\,\frac{z(z-\nu)^{\nu-1}}{\nu!}. \tag{12}$$

Это выражение также можно рассматривать как результат суммирования интерполяционного ряда Абеля (2'), который сходится к $F(z)$, например, в случае, когда особые точки $f(z)$ лежат внутри области ограниченной кривой $|\zeta e^{\zeta}| = e^{-1}$.

В. Если $u(\zeta) = e^{\zeta}(e^{\zeta} - 1)$, то $A_n = \Delta^n F(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Эта функция конформно отображает область D с границей $x = -\ln 2 \cos y$, $\zeta = x + iy$, $|\varphi| \leqslant \pi/2$ в плоскости ζ на плоскость w, разрезанную вдоль отрицательной части действительной оси от точки $-1/4$ до $-\infty$.

Поэтому, если $f(z)$ имеет все свои особые точки внутри D, то для $F(z)$ получается представление:

$$F(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} \Delta^{\nu} F(\nu)\, c_{n\nu} \frac{z(z-\nu-1)\ldots(z-2\nu+1)}{\nu!}. \tag{13}$$

Для случая, когда особые точки $f(z)$ будут лежать в области G ограниченной кривой $|e^{\zeta}(e^{\zeta} - 1)| = 1/4$, функция $F(z)$ будет представляться рядом:

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{\nu} F(\nu) \frac{z(z-\nu-1)\ldots(z-2\nu+1)}{\nu!}. \tag{14}$$

Выражение (13) является также результатом суммирования ряда (14)

Поступило
19 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. О. Гельфонд, Усп. математ. наук, 3, 144 (1937).