Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ В КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА НОРМАЛЬНОГО ТИПА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 III 1949)

Пользуясь терминологией Гончарова, будем говорить, что целая функция принадлежит классу $[\rho, \mu]$, если она или имеет порядок $<\rho$ или имеет порядок ρ и тип $\leqslant\mu$. Целую функцию будем считать далее, принадлежащей классу $[\rho, \mu)$, если она или имеет порядок $<\rho$ или имеет порядок ρ и тип $<\mu$.

Пусть m — наименьшее целое число большее ρ и пусть $\varepsilon = e^{2\pi i/m}$.

Теорема 1. *Пусть $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$, — последовательность точек в плоскости комплексного переменного z. Тогда для того, чтобы при любой системе чисел $\{a_{n,p}\}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ такой, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_{n,p}|}{|\lambda_n|^\rho} < \infty \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, m-1), \tag{1}$$

существовала бы хоть одна функция $\omega(z) \subset [\rho, \infty)$ со свойством $\omega(\varepsilon^p\lambda_n) = a_{n,p}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ p = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяла условиям:

A. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \sigma < \infty.$

B. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{|\lambda_n|^\rho} \ln\left|\dfrac{1}{F'(\lambda_n)}\right| = \delta < \infty, \quad F(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z^m}{\lambda_n^m}\right).$

Для доказательства теоремы нам необходима будет следующая легко устанавливаемая

Лемма. *Если последовательность $\{\mu_n\}$, $|\mu_1| \leqslant |\mu_2| \leqslant \ldots$, такова, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{n}{|\mu_n|^\rho} = \sigma_1 < \infty$, то*

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{1}{|z|^\rho} \ln \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{|z|^m}{|\mu_n|^m}\right) \leqslant \frac{\sigma_1 m}{\rho}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{m/\rho}+1} = \frac{\sigma_1\pi}{\sin\frac{\pi\rho}{m}}.$$

Используя лемму, докажем сперва необходимость условий A и B. Для этого допустим, что при любой системе чисел $\{a_{n,p}\}$ со свойством (1) существует хоть одна такая функция $\omega(z) \subset [\rho, \infty)$, что

$\omega(\varepsilon^p \lambda_n) = a_{n,p}$ $(n = 1, 2, \ldots; \; p = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$. Тогда, если положим, в частности, все числа $a_{n,p}$, за исключением только числа $a_{1,m-1}$, равными нулю, увидим, что точки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ являются нулями некоторой целой функции из класса $[\rho, \infty)$ и поэтому удовлетворяют условию А. Из этого будет вытекать далее, в силу леммы, что функция $F(z) \subset [\rho, \infty)$. Предположим теперь от противного, что условие В не выполняется, т. е. что $\delta = \infty$. Выберем тогда из последовательности $\{\lambda_n\}$ подпоследовательность $\{\mu_n\}$ такую, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{|\mu_n|^\rho} \ln \left| \frac{1}{F'(\mu_n)} \right| = \infty, \qquad |\mu_{n+1}| \geqslant 2 |\mu_n| \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

и обозначим через $\omega(z)$ ту функцию из $[\rho, \infty)$, которая в точках $\varepsilon^p \mu_n$ $(n = 1, 2, \ldots; \; p = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ принимает значения, равные единице, а в остальных точках множества $\{\varepsilon^p \lambda_n\}$ обращается в нуль. Введем функцию $\Omega(z) = \omega(z)\omega(\varepsilon z) \ldots \omega(\varepsilon^{m-1} z)$. Так как $\Omega(z) \subset [\rho, \infty)$ и $\Omega(z) = \Omega(\varepsilon^p z)$ $(p = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$, эта функция имеет вид:

$$\Omega(z) = z^{ms} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^m}{\nu_n^m}\right).$$

На основании этого имеем равенство

$$\frac{\Omega(z)}{F(z)} = \frac{f(z)}{\Phi(z)}, \tag{3}$$

где, поскольку все $\lambda_n^m \neq \mu_j^m$ $(j = 1, 2, \ldots)$ входят в последовательность $\{\nu_n^m\}$,

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^m}{\mu_n^m}\right), \qquad f(z) = z^{ms} \prod_{\nu_n^m \neq \lambda_j^m}{}' \left(1 - \frac{z^m}{\nu_n^m}\right).$$

Так как $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \dfrac{n}{|\nu_n|^\rho} < \infty$, функция $f(z)$, согласно лемме, принадлежит классу $[\rho, \infty)$. Из (3), учитывая равенство $\Omega(\mu_n) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, получаем, что

$$\frac{1}{F'(\mu_n)} = \frac{f(\mu_n)}{\Phi'(\mu_n)},$$

и что, следовательно,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{|\mu_n|^\rho} \ln \left| \frac{1}{F'(\mu_n)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{|\mu_n|^\rho} \ln |f(\mu_n)| + \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{|\mu_n|^\rho} \ln \left| \frac{1}{\Phi'(\mu_n)} \right|. \tag{4}$$

Первое слагаемое в правой части отлично от ∞, ибо $f(z) \subset [\rho, \infty)$. Второе слагаемое также отлично от ∞, ибо, в силу того, что $|\mu_{n+1}| \geqslant 2|\mu_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

$$|\Phi'(\mu_n)| = \frac{m}{|\mu_n|} \prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - \frac{\mu_n^m}{\mu_k^m}\right| \prod_{k=n+1}^{\infty} \left|1 - \frac{\mu_n^m}{\mu_k^m}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{|\mu_n|} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{mn}}\right) = \frac{c}{|\mu_n|}.$$

Следовательно, левая часть неравенства (4) будет отлична от ∞ вопреки условию (2). Значит, условие В является необходимым.

Докажем теперь достаточность условий А и В. Для этого положим:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|^\rho} \ln \left| \frac{a_{n,p}}{F'(\lambda_n)} \right| = \gamma.$$

В силу (1) и В $\gamma < \infty$. Введем функцию

$$\omega(z) = F(z) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z), \quad P_n(z) = \frac{a_{n,0}}{F'(\lambda_n)} \frac{1}{z-\lambda_n} \left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^{s_n}.$$

При соответствующем выборе чисел s_n она будет удовлетворять условиям: $\omega(z) \subset [\rho, \infty)$, $\omega(\lambda_n) = a_{n,0}$, $\omega(\varepsilon^p \lambda_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots; p = 1, 2, \ldots, m-1)$.

В самом деле, ограничиваясь здесь рассмотрением случая, когда $\gamma > 0$, обозначим через s_n $(n = 1, 2, \ldots)$ наименьшее целое число $\geqslant \gamma\rho |\lambda_n|^\rho$. Мы имеем: $s_n = \alpha_n |\lambda_n|^\rho$, $\alpha_n \geqslant \gamma\rho$. Пусть числа ε_1 и $n_0(\varepsilon_1)$ таковы, что $0 < \varepsilon_1 < \gamma$ и при $n > n_0(\varepsilon_1)$

$$\left| \frac{a_{n,0}}{F'(\lambda_n)} \right| < e^{(\gamma+\varepsilon_1)|\lambda_n|^\rho}, \qquad |\lambda_n|^\rho > \frac{n}{\sigma+\varepsilon_1},$$

и пусть $N = N(r)$ — наименьшее целое число со свойством: $|\lambda_N| > 2e^{2/\rho} r$. Полагая

$$\omega_1(z) = \sum_N^\infty P_n(z), \qquad \omega_2(z) = F(z) \sum_{n_0}^{N-1} P_n(z),$$

будем иметь:

$$\left| \omega_1(z) \right|_{|z|=r} \leqslant \sum_N^\infty e^{(\gamma+\varepsilon_1)|\lambda_n|^\rho} \left| \frac{r}{\lambda_n} \right|^{\alpha_n |\lambda_n|^\rho} \leqslant \sum_N^\infty \left| \frac{e^{2/\rho} r}{\lambda_n} \right|^{\alpha_n |\lambda_n|^\rho} <$$

$$< \sum_N^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma\rho |\lambda_n|^\rho} < \sum_N^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\gamma\rho}{\sigma+\varepsilon_1} n} < \sum_N^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\gamma\rho}{\sigma+\gamma} n} = \mathrm{const}; \tag{5}$$

$$\left| \omega_2(z) \right|_{|z|=r} \leqslant \sum_{n_0}^{N-1} \left| \frac{F(z)}{z-\lambda_n} \right| \left| \frac{a_{n,0}}{F'(\lambda_n)} \right| \left| \frac{r}{\lambda_n} \right|^{\alpha_n |\lambda_n|^\rho}.$$

Так как при любом n, когда $|z| > \rho_0(\varepsilon_1)$, имеем равномерно:

$$\left| \frac{F(z)}{z-\lambda_n} \right| < \frac{1 - |z/\lambda_1|^m}{|\lambda_1| - |z|} \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \left|\frac{z}{\lambda_k}\right|^m\right) < \exp\left[(\tau+\varepsilon_1)|z|^\rho\right],$$

где, в силу леммы, $\tau = \frac{\pi\sigma}{\sin(\pi\rho/m)}$, то, следовательно, при $r > \rho_0(\varepsilon_1)$

$$\left| \omega_2(z) \right|_{|z|=r} < r e^{(\tau+\varepsilon_1)|r|^\rho} \sum_{n_0}^{N-1} e^{(\gamma+\varepsilon_1)|\lambda_n|^\rho} \left| \frac{r}{\lambda_n} \right|^{\gamma\rho|\lambda_n|^\rho}. \tag{6}$$

Полагая $\alpha = e^{\frac{\gamma+\varepsilon_1}{\gamma\rho}}$, $\beta = \gamma\rho$, $f(x) = \left(\frac{\alpha r}{x}\right)^{\beta x^\rho}$, общий член под знаком суммы в (6) представим как $f(|\lambda_n|^\rho)$. Так как функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения при $x = \alpha r e^{-1/\rho}$ и это $x > n_0$ при больших r, то

$$f(|\lambda_n|^\rho) \leqslant f(\alpha r e^{-1/\rho}) = \exp(\gamma e^{\varepsilon_1/\gamma} r^\rho). \tag{7}$$

Далее, из того, что

$$\left(\frac{N-1}{\sigma+\varepsilon_1}\right)^{1/\rho} < |\lambda_{N-1}| \leqslant 2e^{2/\rho} r,$$

находим: $N-1 < (\sigma+\varepsilon_1)e^2(2r)^\rho$. Принимая во внимание это и неравенство (7), из (6) получаем:

$$|\omega_2(z)|_{|z|=r} < (\sigma+\varepsilon_1)e^2(2r)^\rho \exp[(\tau+\varepsilon_1+\gamma e^{\varepsilon_1/\gamma})r^\rho].$$

Последнее неравенство в соединении с неравенством (5) показывает, что $\omega(z) \subset [\rho, \tau+\gamma]$ и, тем более, $\omega(z) \subset [\rho, \infty)$. Тот факт, что функция $\omega(z)$ удовлетворяет условию $\omega(\lambda_n) = a_{n,0}$, $\omega(\varepsilon^p\lambda_n)=0$ $(n=1, 2, \ldots;$ $p=1, 2, \ldots, m-1)$, очевиден. Таким же путем построим функцию $\psi_j(z) \subset [\rho, \tau+\gamma]$ $(j=1, 2, \ldots, m-1)$ со свойством: $\psi_j(\varepsilon^j\lambda_n)=a_{n,j}$, $\psi_j(\varepsilon^p\lambda_n)=0$ $(n=1, 2, \ldots; p=0, 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m-1)$.

Тогда функция $\psi(z)=\omega(z)+\psi_1(z)+\cdots+\psi_{m-1}(z)$ будет принадлежать классу $[\rho, \tau+\gamma]$, в точках $\varepsilon^p\lambda_n$ $(n=1, 2, \ldots; p=0, 1, \ldots, m-1)$ она будет принимать значения, соответственно равные $a_{n,p}$.

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Попутно мы доказали и такую теорему.

Теорема 2. *Если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \sigma, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|^\rho} \ln\left|\frac{a_{n,p}}{F'(\lambda_n)}\right| = \gamma,$$

то тогда целую функцию $\omega(z)$ *со свойством*

$$\omega(\varepsilon^p\lambda_n) = a_{n,p} \quad (n=1, 2, \ldots; p=0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

можно найти в классе $[\rho, \tau+\overset{+}{\gamma}]$ $(\overset{+}{\gamma}=\gamma$, *если* $\gamma>0$, *и* $\overset{+}{\gamma}=0$, *если* $\gamma\leqslant 0)$, *где* $\tau=\frac{\pi\sigma}{\sin(\pi\rho/m)}$ *и* m — *наименьшее целое число, большее* ρ.

Можно показать, что теорема 2 является точной в том смысле, что

Теорема 3. *По любым неотрицательным числам* σ и $\overset{+}{\gamma}$ *всегда можно построить такие последовательности* $\{\lambda_n\}$ *и* $\{a_{n,p}\}$, *что будут выполняться условия:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \sigma, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|^\rho} \ln\left|\frac{a_{n,p}}{F'(\lambda_n)}\right| = \overset{+}{\gamma}$$

и не будет существовать в классе $[\rho, \tau+\overset{+}{\gamma})$ *ни одной функции* $\omega(z)$ *со свойством* $\omega(\varepsilon^p\lambda_n)=a_{n,p}$ $(n=1, 2, \ldots; p=0, 1, 2, \ldots, m-1)$.

В заключение заметим, что в случае $\rho=1$ теорема 1, а также теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3, были установлены в работе [1]. В работе [2] были даны условия возможности построения по значениям a_n в точках λ_n $(n=1, 2, \ldots)$ функции из класса $[\rho, \infty]$.

Поступило
19 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Леонтьев, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, № 1, 33 (1949).
[2] А. Ф. Леонтьев, ДАН, 61, № 5 (1948).