Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

В. М. ДУБРОВСКИЙ

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПАРАМЕТРА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 III 1949)

Вопрос о непрерывности относительно параметра определенного интеграла от функции, непрерывной относительно этого параметра, кажется весьма элементарным. Вряд ли стоит отмечать здесь, насколько часто этот вопрос встречается в разных исследованиях и насколько существенным он иногда оказывается. Однако вряд ли его можно считать в настоящее время вполне удовлетворительно решенным даже в самых простых случаях. В этой работе выводится новый простой критерий непрерывности определенного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть множество каких-то элементов и $\mathfrak{M}$ — семейство подмножеств множества $\mathfrak{A}$, определяемое условиями: $\mathfrak{M}$ содержит какие угодно разности и конечные или счетные суммы входящих в него множеств, все множество $\mathfrak{A}$ и пустое множество. Мы будем рассматривать в последующем интегралы в смысле Лебега — Стильтьеса ([1]), обозначая их символом:

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} f(x)\, M(d\mathfrak{A}_x),$$

где $f(x)$ — функция элемента $x \subset \mathfrak{A}$, измеримая относительно семейства $\mathfrak{M}$ и суммируемая относительно неотрицательной вполне аддитивной функции множества $M(e)$, определенной и конечной на семействе $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{B}$ — область интегрирования ($\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$). Значения рассматриваемых функций суть вещественные числа. Такие интегралы определяются так же, как и обыкновенные интегралы Лебега, с той лишь разницей, что вместо измеримых множеств рассматриваются множества семейства $\mathfrak{M}$, а вместо меры в смысле Лебега — соответствующие значения вполне аддитивной неотрицательной функции множества $M(e)$, определенной и конечной на семействе $\mathfrak{M}$.

Определение. Пусть функция $f(\alpha, x)$ элемента $x \subset \mathfrak{A}$ и параметра α при каждом определенном значении последнего измерима относительно семейства $\mathfrak{M}$ и суммируема на множестве $\mathfrak{A}$ относительно неотрицательной вполне аддитивной функции множества $M(\alpha, e)$, определенной и конечной на семействе $\mathfrak{M}$, зависящей от параметра α. Взяв положительное число N, положим:

$$\begin{aligned} f_N(\alpha, x) &= f(\alpha, x), && \text{если } |f(\alpha, x)| \leqslant N; \\ f_N(\alpha, x) &= N, && \text{если } f(\alpha, x) > N; \\ f_N(\alpha, x) &= -N, && \text{если } f(\alpha, x) < -N. \end{aligned}$$

Интеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_{\mathfrak{A}} f(\alpha, x)\, M(\alpha, d\mathfrak{A}_x)$$

сходится равномерно относительно параметра α, если разность

$$D(\alpha, N)=\int\limits_{\mathfrak{A}} |f(\alpha, x)|\, M(\alpha, d\mathfrak{A}_x)-\int\limits_{\mathfrak{A}} |f_N(\alpha, x)|\, M(\alpha, d\mathfrak{A}_x)$$

стремится к нулю равномерно относительно параметра α при $N\to\infty$.

Теорема 1. *Пусть существуют положительные постоянные K и $p>1$ такие, что для любого α выполняется условие*

$$\int\limits_{\mathfrak{A}} |f(\alpha, x)|^p\, M(\alpha, d\mathfrak{A}_x)\leqslant K,$$

где $f(\alpha, x)$ — измеримая функция элемента $x\subset\mathfrak{A}$, суммируемая относительно неотрицательной вполне аддитивной функции множества $M(\alpha, e)$, определенной и конечной на семействе $\mathfrak{M}$; α — параметр.

Тогда интеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_{\mathfrak{A}} f(\alpha, x)\, M(\alpha, d\mathfrak{A}_x)$$

сходится равномерно относительно параметра α.

Доказательство. Полагая

$$F(\alpha, e)=\int\limits_{e} |f(\alpha, x)|\, M(\alpha, d\mathfrak{A}_x)$$

для любого $e\subset\mathfrak{M}$, допустим, что интеграл $F(\alpha, \mathfrak{A})$ сходится неравномерно относительно α. Тогда, как легко видеть, будут существовать положительное число ε, последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ значений параметра α и возрастающая до бесконечности последовательность натуральных чисел $N_1, N_2, \ldots$ такие, что будет выполняться неравенство

$$\int\limits_{e_k} [|f\alpha_k, x)|-N_k]\, M(\alpha_k, d\mathfrak{A}_x)\geqslant\varepsilon,$$

где e_k — совокупность элементов $\mathfrak{A}$, для которых первый множитель под знаком интеграла положителен ($k=1, 2, \ldots$). Тем более, будет иметь место неравенство $F(\alpha_k, e_k)\geqslant\varepsilon$ ($k=1, 2, \ldots$), откуда, применяя неравенство Гельдера ([2]) к интегралу $F(\alpha_k, e_k)$, мы получим

$$\varepsilon\leqslant F(\alpha_k, e_k)\leqslant\left[\int\limits_{e_k} |f(\alpha_k, x)|^p\, M(\alpha_k, d\mathfrak{A}_x)\right]^{1/p}\left[\int\limits_{e_k} M(\alpha_k, d\mathfrak{A}_x)\right]^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant K^{1/p} M(\alpha_k, e_k)^{1/q}\qquad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ k=1, 2, \ldots\right);$$

или, окончательно,

$$M(\alpha_k, e_k)\geqslant\frac{\varepsilon^q}{K^{q/p}}\qquad(k=1, 2, \ldots).$$

С другой стороны, из основного условия рассматриваемой теоремы непосредственно вытекает

$$K\geqslant\int\limits_{e_k} |f(\alpha_k, x)|^p\, M(\alpha_k, d\mathfrak{A}_x)\geqslant N_k^{\,p} M(\alpha_k, e_k)\quad(k=1, 2, \ldots),$$

откуда

$$M(\alpha_k, e_k) \leqslant K / N_k^{\,p} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Эта оценка для $M(\alpha_k, e_k)$ противоречит предыдущей, откуда интеграл $F(\alpha, \mathfrak{A})$, а вместе с ним также интеграл $I(\alpha)$ сходятся равномерно относительно α.

Замечание. Обратная теорема неверна, что доказывает следующий пример. $\mathfrak{A}$ есть интервал $0 \leqslant x \leqslant 1/2$; $f(\alpha, x) = 1 / x \ln^2 x$ не зависит от α; $\mathfrak{M}$ есть семейство измеримых в смысле Лебега множеств интервала $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, а $M(\alpha, e)$ — мера в смысле Лебега множества e для любого α.

Возвращаясь теперь к общему случаю, будем в дальнейшем предполагать, что областью изменения параметра α является некоторое метрическое, замкнутое компактное множество $\mathfrak{K}$.

Теорема 2. *Пусть функция $f(\alpha, x)$ элемента $x \subset \mathfrak{A}$ и параметра $\alpha \subset \mathfrak{K}$ будет непрерывна по α на множестве $\mathfrak{K}$ при каждом определенном $x \subset \mathfrak{A}$. Пусть, кроме того, при каждом определенном $\alpha \subset \mathfrak{K}$ функция $f(\alpha, x)$ будет измерима по x относительно семейства $\mathfrak{M}$ и суммируема относительно неотрицательной вполне аддитивной функции множества $M(\alpha, e)$, определенной и конечной на семействе $\mathfrak{M}$, которая зависит от параметра α и является непрерывной функцией последнего на множестве $\mathfrak{K}$ при каждом определенном $e \subset \mathfrak{M}$.*

Тогда, если интеграл

$$I(\alpha) = \int_{\mathfrak{A}} f(\alpha, x) M(\alpha, d\mathfrak{A}_x)$$

сходится равномерно относительно параметра α, то он представляет собой функцию этого параметра, непрерывную на множестве $\mathfrak{K}$.

Если, с другой стороны, интеграл $I(\alpha)$ есть непрерывная функция от α на множестве $\mathfrak{K}$, причем функция $f(\alpha, x)$ неотрицательна, то интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно относительно α.

Доказательство. Пусть интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно. Рассмотрим произвольную последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ элементов $\mathfrak{K}$, сходящуюся к элементу α_0. Взяв сколь угодно малое положительное число ε, выберем положительное число N столь большим, чтобы для любого $\alpha \subset \mathfrak{K}$ выполнялось неравенство

$$D(\alpha, N) = \int_{\mathfrak{A}} | f(\alpha, x) | M(\alpha, d\mathfrak{A}_x) - \int_{\mathfrak{A}} | f_N(\alpha, x) | M(\alpha, d\mathfrak{A}_x) < \varepsilon.$$

Легко убедиться в справедливости соотношения

$$|I(\alpha_k) - I(\alpha_0)| \leqslant \left| \int_{\mathfrak{A}} f_N(\alpha_k, x) M(\alpha_k, d\mathfrak{A}_x) - \int_{\mathfrak{A}} f_N(\alpha_0, x) M(\alpha_0, d\mathfrak{A}_x) \right| + \\ + D(\alpha_k, N) + D(\alpha_0, N).$$

Из ([3]) следует, что разность интегралов в правой части последнего неравенства при постоянном N и при $k \to \infty$ стремится к нулю, откуда левая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно малой путем увеличения индекса k.

Допустим теперь, что интеграл $I(\alpha)$ непрерывен относительно α и что функция $f(\alpha, x)$ неотрицательна. Из ([3]) следует, что в этом случае разность $D(\alpha, N)$ при постоянном N непрерывна по α на множестве $\mathfrak{K}$. Докажем, что при $N \to \infty$ эта разность стремится к нулю равномерно относительно α (это утверждение легко приводится к известной теореме Дини). Допустим противное. Тогда будут существовать положительное число ε, последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ элементов $\mathfrak{R}$ и неограниченная возрастающая последовательность $N_1, N_2, \ldots$ положительных чисел такие, что будут выполняться условия:

$$D(\alpha_k, N_k) > \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad \lim_{k \to \infty} \alpha_k = \alpha_0.$$

Это следует из компактности и замкнутости множества $\mathfrak{R}$. Возьмем положительное число η, меньше ε, и столь большое k, чтобы выполнялось неравенство $D(\alpha_0, N_k) < \eta$. Тогда, в силу непрерывности $D(\alpha, N_k)$ в точке α_0, найдется такое $\nu = \nu(k)$, большее k, что будет выполняться неравенство $D(\alpha_\nu, N_k) < \eta$. С другой стороны, $D(\alpha_\nu, N_\nu) > \varepsilon > \eta$. Мы приходим, следовательно, к противоречию, так как $D(\alpha_\nu, N)$ не возрастает при возрастании N. Теорема доказана.

Простым следствием предыдущего является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть имеют место условия теоремы* 1, *причем значения параметра α образуют метрическое, замкнутое, компактное множество $\mathfrak{R}$. Пусть, кроме того, функции $f(\alpha, x)$ и $M(\alpha, e)$ непрерывны относительно α на множестве $\mathfrak{R}$ при любых постоянных $x \subset \mathfrak{A}$ и $e \subset \mathfrak{M}$.*

Тогда интеграл

$$I(\alpha) = \int_{\mathfrak{A}} f(\alpha, x)\, M(\alpha, d\mathfrak{A}_x)$$

представляет собой функцию от α, непрерывную на множестве $\mathfrak{R}$.

Изложенные результаты выясняют ошибочность утверждения В. В. Немыцкого ([4]), состоящего в том, что непрерывность подинтегральной функции относительно параметра α и равномерная ограниченность соответствующего определенного интеграла (при изменении этого параметра) влекут за собой непрерывность самого интеграла относительно параметра α.

Это, впрочем, ясно из следующего примера.

Положим

$$f(\alpha, x) = \frac{2(x - \alpha^2)}{(\alpha - \alpha^2)(\sqrt{\alpha} - \alpha^2)} \quad \text{в области } \alpha^2 \leqslant x \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < 1;$$

$$f(\alpha, x) = \frac{2(\sqrt{\alpha} - x)}{(\sqrt{\alpha} - \alpha)(\sqrt{\alpha} - \alpha^2)} \quad \text{в области } \alpha \leqslant x \leqslant \sqrt{\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1;$$

$$f(\alpha, x) = 0 \text{ в остальных точках квадрата } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Как легко видеть, при любом определенном x из интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция $f(\alpha, x)$ непрерывна по α в замкнутом интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Однако интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^1 f(\alpha, x)\, dx$$

разрывен, будучи равным нулю при $\alpha = 1$ и единице для остальных значений α интервала $0 \leqslant \alpha < 1$.

Поступило
2 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Radon, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., **122**, Abt. II-a, 1295 (1913); M. Fréchet, Bull. Soc. Math. de France, **43**, 248 (1915). O. Nikodym, Fund. Math., **15**, 131 (1930). [2] E. W. Hobson, Theory of Functions of a Real Variable..., 2nd Ed., Cambridge, **1**, 1921—1926, p. 588. [3] В. М. Дубровский, Изв. АН СССР, сер. матем., **9**: 4, 311 (1945). [4] В. Немыцкий, Математ. сб., **41**, в. 3, 436 (1934).