Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Р. М. ГЕЙДЕЛЬМАН

О КОНГРУЕНЦИЯХ ОКРУЖНОСТЕЙ, РАЗЛОЖИМЫХ НА КАНАЛОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 III 1949)

1°. Присоединим к окружности конгруенции конформный репер (1), состоящий из двух точек A и A_4 и трех единичных взаимно ортогональных сфер S_1, S_2, S_3, проходящих через эти точки.

Точки A и A_4 поместим в фокусы конгруенции, сферы S_2 и S_3 возьмем так, чтобы они проходили через окружность конгруенции и сфера S_3 касалась фокальной поверхности (A).

Точку A_4 нормируем так, чтобы $AA_4 = 1$.

Уравнения инфинитезимального перемещения элементов этого фокального репера имеют вид:

$$\begin{gathered} dA = \omega_0^0 A + \omega^k S_k + \omega^4 A_4, \\ dS_i = \omega_i^0 A + \omega_i^k S_k + \omega_i^4 A_4, \qquad (i, k = 1, 2, 3) \\ dA_4 = \omega_4^0 A + \omega_4^k S_k + \omega_4^4 A_4. \end{gathered} \tag{1}$$

Дифференцируя равенства $S_i^2 = 1$; $S_i S_j = 0$; $S_i A = 0$; $S_i A_4 = 0$; $A^2 = 0$; $A_4^2 = 0$; $AA_4 = 1$ $(i \neq j = 1, 2, 3)$, получим:

$$\begin{gathered} \omega_i^i = 0; \quad \omega_i^j = -\omega_j^i; \quad \omega_i^4 = -\omega^i; \quad \omega_4^i = -\omega_i^0; \\ \omega^4 = \omega_4^0 = 0; \quad \omega_4^4 = -\omega_0^0. \end{gathered} \tag{2}$$

Так как сфера S_3 касается фокальной поверхности (A), то $S_3 dA = 0$, откуда $\omega^3 = 0$.

Формы ω^1 и ω^2 примем за основные. Тогда

$$\omega_\alpha^\beta = m_\alpha^\beta \omega^1 + n_\alpha^\beta \omega^2 \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

2°. Если у конгруенции существует семейство каналовых поверхностей (поверхностей, образованных ∞^1 окружностей, у которых вдоль всей образующей окружности существует общая касательная к поверхности сфера), то

$$m_3^0 = l m_1^3; \quad n_3^0 = l n_1^3; \quad m_2^0 = l m_1^2. \tag{4}$$

Произвольная конгруенция не обладает семейством каналовых поверхностей.

Определение. Конгруенции, разложимые на два семейства каналовых поверхностей, назовем конгруенциями K.

Конгруенции K определяются системой уравнений:

$$\omega_1^3 = m_1^3 \omega^1 + n_1^3 \omega^2; \qquad \omega_1^2 = m_1^2 \omega^1 + n_1^2 \omega^2; \qquad \omega_3^0 = l \omega_1^3; \qquad \omega_2^0 = \frac{m_1^2}{m_1^3} \omega_3^0. \tag{5}$$

Система (5) находится в инволюции и определяет конгруенции K с произволом двух функций двух аргументов.

Теорема. *Четыре семейства развертывающихся поверхностей конгруенции K вырождаются в два попарно совпавших семейства каналовых поверхностей. Обратно, если четыре семейства развертывающихся поверхностей конгруенции окружностей вырождаются в два попарно совпавших семейства, то эта конгруенция — конгруенция K, а эти два семейства являются двумя семействами каналовых поверхностей.*

Множитель l зависит только от положения точки A_4 репера на окружности. В частности, если поместить точку A_4 в фокус F_3, то $l=0$.

Из теоремы следует: ребра возврата у двух пар фокальных поверхностей $\{(A)$ и $(F_3)\}$, $\{(A_4)$ и $(F_2)\}$ конгруенции K попарно соответствуют, причем две фокальные поверхности, у которых ребра возврата соответствуют, либо обе действительны, либо обе мнимы.

Теорема. *Фокальные поверхности одной пары (A) и (F_3) конгруенции K являются огибающими одной и той же конгруенции сфер S_3.*

3°. Определение. Циклические системы Рибокура — конгруенции, допускающие ∞^1 ортогональных поверхностей,— будем называть конгруенциями R.

Конгруенции R существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Теорема. *Конгруенции R обладают двумя семействами каналовых поверхностей, причем каналовые поверхности обоих семейств ортогональны.*

Обратно, конгруенции K, у которых каналовые поверхности обоих семейств ортогональны, суть конгруенции R.

4°. Определение. Конгруенции K, у которых семейство ребер возврата фокальной поверхности (A) является семейством линий кривизны, назовем конгруенциями Г.

Они определяются системой уравнений:

$$\omega_1^3 = m_1^3\omega^1; \quad \omega_3^0 = lm_1^3\omega^1; \quad \omega_1^2 = m_1^2\omega^1 + n_1^2\omega^2; \quad \omega_2^0 = lm_1^2\omega^1. \tag{6}$$

Система уравнений (6) находится в инволюции и определяет конгруенции Г с произволом одной функции двух аргументов.

Определение. Сеть, высекаемую на фокальных поверхностях каналовыми поверхностями конгруенции, назовем сетью K.

Теорема. *Сеть K на паре фокальных поверхностей (A) и (F_3) конгруенции Г является сетью линий кривизны, и эти поверхности являются преобразованиями Рибокура друг из друга.*

5°. Определение. Конгруенции R, у которых ребрами возврата фокальной поверхности (A) служит одно семейство линий кривизны, назовем конгруенциями B.

Из определения следует, что конгруенции B являются частным случаем конгруенций Г при $m_1^2=0$ и определяются системой:

$$\omega_1^3 = m_1^3\omega^1; \quad \omega_3^0 = lm_1^3\omega^1; \quad \omega_1^2 = n_1^2\omega^2; \quad \omega_2^0 = 0. \tag{7}$$

Система уравнений (7) — в инволюции и определяет конгруенции B с произволом четырех функций одного аргумента.

Ясно, что конгруенции B обладают всеми свойствами конгруенций Г и R, кроме того, для них справедливы следующие теоремы:

Теорема. *Семейство $\omega^2=0$ сети K на всех четырех фокальных поверхностях будет семейством линий кривизны, эти линии—*

сферические кривые, и соответствующая четверка линий лежит на одной сфере S_2 — главной сфере фокальных поверхностей (A_4) и (F_2).

Теорема. *Две фокальные поверхности разных пар (A) и (A_4) или (F_2) и (F_3) в соответствующих точках ортогональны, а поверхности обеих пар (A) и (F_3), (A_4) и (F_2) огибают одно и то же многообразие сфер, а именно, пара (A) и (F_3) огибает ∞^2 сфер S_3, а пара (A_4) и (F_2) ∞^1 сфер S_2. Следовательно, поверхности (A_4) и (F_2) — каналовые поверхности.*

Теорема. *Конгруенции B разложимы на ∞^1 семейств окружностей, лежащих на одной сфере.*

Конгруенции B, у которых сферы S_3 являются центральными сферами фокальной поверхности (A), определяются условием $m_1^3 = 1$ и существуют с произволом одной функции одного аргумента.

Пара фокальных поверхностей (A) и (F_3) у этих конгруенций — каналовые изотермические поверхности с образующими окружностями $\omega^1 = 0$, другая пара фокальных поверхностей (A_4) и (F_2) вырождается в линии — геометрическое место точек пересечения всех окружностей каналовых поверхностей семейства $\omega^1 = 0$.

6°. Частный случай этих конгруенций при $n_1^2 = 0$ назовем конгруенциями C.

Конгруенции C определяются следующей системой (если точку A_4 поместить в фокус F_3):

$$\omega_1^3 = \omega^1; \quad \omega_3^0 = 0; \quad \omega_1^2 = 0; \quad \omega_2^0 = n_2^0\, \omega^2. \tag{8}$$

Конгруенции существуют с произволом одного параметра.

Теорема. *Фокальные поверхности (A) и (F_3) конгруенции C являются циклидами.*

Теорема. *Четыре фокуса конгруенции C гармонически разделяют окружность конгруенции.*

Циклиды с двумя узлами будем называть гиперболическими, циклиды с одним узлом — параболическими, циклиды без узлов — эллиптическими циклидами.

Теорема. *Конгруенции C с четверкой действительных фокусов имеют фокальной поверхностью (A) эллиптическую циклиду.*

Конгруенции C с парой действительных и парой мнимых фокусов могут иметь фокальной поверхностью (A) любой тип циклид.

Теорема. *Фокальными поверхностями (A) и (F_3) конгруенции C являются циклиды одного и того же типа, и узлы обеих циклид совпадают.*

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. С. П. Финикову, под руководством которого была проделана работа.

Поступило
5 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Cartan, Ann. soc. polon. math., 2, 171 (1923).