Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

М. В. Задорожнюк, А. В. Цитринов, А. М. Чеховская

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ПРЕДЕЛЫ. ПРОИЗВОДНЫЕ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по дисциплине «Математика»
для студентов всех специальностей
заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73
З-15

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 3 от 09.02.2012 г.*)

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого *Е. С. Петрова*

Задорожнюк, М. В.

З-15 Элементы линейной и векторной алгебры и аналитической геометрии. Пределы. Производные : учеб.-метод. пособие по дисциплине «Математика» для студентов всех специальностей заоч. формы обучения / М. В. Задорожнюк, А. В. Цитринов, А. М. Чеховская. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2013. – 57 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://alis.gstu.by/StartEK/. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-130-7.

Предназначено для самостоятельной подготовки студентов заочного отделения к тестированию и экзамену по математике.

Для студентов всех специальностей заочной формы обучения.

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-535-130-7

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Матрицы. Действия над матрицами

Матрицей размерности $n \times m$ называется прямоугольная таблица, состоящая из n строк и m столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Если $n = m$, то матрица называется *квадратной* порядка n.

Элемент a_{ij} таблицы имеет два индекса, где i – номер строки, в которой находится элемент, j – номер столбца.

Диагональ, содержащая элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}, называется *главной диагональю* квадратной матрицы A, а диагональ, содержащая элементы a_{1n}, a_{2n-1}, …, a_{n1} – *побочной диагональю*.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

Единичной называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичную матрицу обозначают буквой E.

Треугольной называется квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Транспонированной к матрице A называется матрица A^T, полученная заменой каждой строки исходной матрицы столбцом с тем же номером.

Для матриц определены следующие операции:

1) *сложение* (*вычитание*) определено только для матриц одинаковых размерностей. Если $A \pm B = C$, то каждый элемент c_{ij} матрицы C вычисляется по формуле: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$;

2) *умножение матрицы на число* состоит в умножении каждого элемента матрицы на это число;

3) *умножение матриц* определено только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, т. е. $A_{n\times m} \times B_{m\times j} = C_{n\times j}$, при этом элемент i-й строки k-го столбца матрицы C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B;

4) *возведение матрицы в степень* определено только для квадратной матрицы. Целой положительной степенью A^k квадратной матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A. Нулевой степенью квадратной матрицы $A\,(A \neq 0)$ называется единичная матрица того же порядка, что и A, т. е. $A^0 = E$.

Пример 1.1. Для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ вычислить $AB^T + 2C$.

Решение. $AB^T + 2C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Найти $f(A)$ для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, если $f(x) = 2x + 1 - x^2$.

Решение. $P(A) = 2A + E - A^2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 21 & 31 \end{pmatrix}.$$

1.2. Определители. Вычисление определителей

Определитель есть число, которое ставится в соответствие квадратной матрице A порядка n и вычисляется по определенному правилу. Обозначения: $\det A$, $|A|$, Δ.

Определитель *первого порядка*:

$$|a_{11}| = a_{11}. \tag{1.1}$$

Определитель *второго порядка*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{1.2}$$

Определитель *третьего* порядка вычисляется по *правилу треугольников*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}). \end{array} \qquad (1.3)$$

Пример 1.3. Вычислить определители первого, второго и третьего порядков:

а) $|7|$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 0 & 7 & -8 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользуемся формулами (1.1)–(1.3):

а) $|7| = 7$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 0 & 7 & -8 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1 \cdot 5 \cdot (-8) + 3 \cdot 7 \cdot (-4) + (-2) \cdot 0 \cdot (-6) - \\ -(3 \cdot 5 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) \cdot (-8) + 1 \cdot (-6) \cdot 7) = -18. \end{array}$

Свойства определителей

• Определитель матрицы не меняется при ее транспонировании.

• При перестановке двух соседних строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

• Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.

• Определитель, у которого элементы одной строки (столбца) соответственно пропорциональны элементам другой строки (столбца), равен нулю. В частности, определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

• Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель.

Разложение определителя по строке (столбцу). Вычисление определителей высших порядков

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из исходного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т. е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{1.4}$$

Для вычисления *определителя* n*-го порядка* удобно пользоваться следующим свойством: определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения. Для разложения определителя лучше выбирать тот ряд, где есть нулевые элементы, так как соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

Пример 1.4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix}$, разложив его по первой строке.

Решение. Воспользуемся свойством, описанным выше, и формулой (1.4):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -34 + 19 + 0 = -15.$$

1.3. Обратная матрица

Матрицей, *обратной* квадратной матрице A, называется квадратная матрица A^{-1}, удовлетворяющая равенствам

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{1.5}$$

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица называется *вырожденной*. Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет единственную обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A (алгебраическое дополнение A_{ij} записывается в строку с номером j и в столбец с номером i, т. е. в так называемом транспонированном порядке).

Пример 1.5. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ найти ей обратную.

Решение. Найдем определитель матицы A: $\det A = 6$, $\det A \neq 0$, следовательно матрица A имеет обратную матрицу. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле (1.4):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -30, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 15, A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \; A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

По формуле (1.6) получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -30 & 12 \\ 1 & 15 & -6 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4. Решение систем линейных уравнений

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называют систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.7}$$

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Систему (1.7) можно представить в матричном виде: $AX = B$, где A – *матрица коэффициентов*, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Матрица коэффициентов системы, дополненная столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы.

Метод обратной матрицы

Этот метод можно применить для решения систем, состоящих из n уравнений с n неизвестными. Если матрица коэффициентов A является невырожденной, то столбец неизвестных X можно найти по формуле

$$X = A^{-1}B. \tag{1.9}$$

Таким образом, чтобы найти столбец неизвестных нужно найти матрицу, обратную матрице коэффициентов, и умножить ее на столбец свободных членов.

Метод Крамера

Метод Крамера также можно применять только для систем, у которых число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы коэффициентов отличен от нуля. Решение такой системы находится по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{1.10}$$

где Δ – определитель матрицы A, Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Метод Гаусса

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных и состоит из двух этапов: *прямой ход* – посредством эквивалентных преобразований система приводится к треугольному виду; *обратный ход* – решается полученная треугольная система, начиная с последнего уравнения. К *эквивалентным преобразованиям* системы относятся:

– умножение любого уравнения системы на произвольное, отличное от нуля, число;

– замена местами строк системы;

– прибавление к какому-либо уравнению системы любого другого уравнения системы, умноженного на некоторое число.

Пример 1.6. Решить систему уравнений методом обратной матрицы, с помощью формул Крамера и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $\det A = 24$. Так как он отличен от нуля, то существует обратная матрица A^{-1}, которую найдем по формуле (1.6):

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 0 & -8 & 8 \\ 3 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой (1.9), получим решение системы:

$$X=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}9 & -8 & 5\\ 0 & -8 & 8\\ 3 & -8 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 4\\ 10\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}72\\ 48\\ -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\end{pmatrix},$$

откуда $x_1=3, x_2=2, x_3=-1$.

Решим исходную систему методом Крамера. Выше было показано, что $\Delta=\det\ A=24$. Найдем Δ_i по формуле (1.3):

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}6 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -3\\ 10 & 2 & -3\end{vmatrix}=72;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 6 & -1\\ 1 & 4 & -3\\ 1 & 10 & -3\end{vmatrix}=48;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}3 & -2 & 6\\ 1 & -1 & 4\\ 1 & 2 & 10\end{vmatrix}=-24.$$

Далее, по формулам (1.10) получим:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{72}{24}=3,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{48}{24}=2,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-24}{24}=-1.$$

Решим систему методом Гаусса. Прямой ход:

Приведем расширенную матрицу системы к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & -1 & 6\\ 1 & -1 & -3 & 4\\ 1 & 2 & -3 & 10\end{array}\right)_{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 10\\ 1 & -1 & -3 & 4\\ 3 & -2 & -1 & 6\end{array}\right)_{\substack{\mathrm{I}\cdot(-1)+\mathrm{II}\\ \mathrm{I}\cdot(-3)+\mathrm{III}}}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 10\\ 0 & -3 & 0 & -6\\ 0 & -8 & 8 & -24\end{array}\right)\sim$$

$$\sim_{\substack{\mathrm{II}\cdot(-1/3)\\ \mathrm{III}\cdot 1/8}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 10\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1 & -3\end{array}\right)_{\mathrm{II}+\mathrm{III}}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 10\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right).$$

Обратный ход:

Запишем систему по приведенной матрице:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=10,\\ \qquad x_2 \qquad\quad = 2,\\ \qquad\qquad\quad x_3=-1,\end{cases}$$

решая которую, получим $x_3=-1, x_2=2, x_1=10-2\cdot 2+3\cdot(-1)=3$.

Окончательно имеем: $x_1=3, x_2=2, x_3=-1$.

Пример 1.7. Найти решение системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Осуществим эквивалентные преобразования строк расширенной матрицы системы, чтобы привести ее к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ {\scriptstyle II+3\cdot I} \\ {\scriptstyle III+2\cdot I} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 16 & 10 \\ 0 & 5 & 16 & 7 \end{array}\right)_{III-II} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 16 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Получили уравнение $0 = -3$, значит система несовместна.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. Векторы

Вектором называется направленный отрезок, который обозначается $\vec{a}$. Вектор характеризуется направлением, координатами и модулем (длиной).

Если начало вектора находится в точке $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, конец в точке $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, то координаты вектора определяются по формуле

$$\vec{a}(x;\ y;\ z) = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A). \qquad (2.1)$$

Модуль вектора определяется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (2.2)$$

Над векторами $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ можно совершать следующие линейные операции:

– сложение (вычитание) $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$;

– умножение вектора на число $c\vec{a} = (cx_1;\ cy_1;\ cz_1)$, где c – некоторое число.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha. \tag{2.3}$$

Если заданы координаты векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{2.4}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2) $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
3) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$

Косинус угла между векторами $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ определяется формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{2.5}$$

Ортогональными называются вектора, лежащие на перпендикулярных прямых.

Критерий ортогональности: два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ с общим началом в точке O называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ наблюдается с конца вектора $\vec{c}$ происходящим против хода часовой стрелки (рис. 2.1).

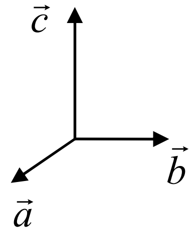


Рис. 2.1

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$; (2.6)

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая.

Если заданы координаты векторов $\vec{a}\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b}\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \tag{2.7}$$

Свойства векторного произведения:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) $(\alpha \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha \cdot \vec{b})$, где α – некоторое число;

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Коллинеарными называются вектора, которые лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Критерий коллинеарности: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю: $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Геометрический смысл векторного произведения: площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна модулю векторного произведения этих векторов:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{2.8}$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Если заданы координаты векторов $\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$ и $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$, то

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Свойства смешанного произведения:

1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;

2) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$;

3) если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ – левая.

Компланарными называются вектора, лежащие на параллельных плоскостях или на одной плоскости.

Критерий компланарности: три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$.

Геометрический смысл смешанного произведения: объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен модулю смешанного произведения этих векторов:

$$V = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|. \tag{2.10}$$

Пример 2.1. Даны две точки $A(3;-4;7)$, $B(5;-6;8)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и координаты точки E – середины отрезка AB.

Решение. По формуле (2.1) получаем:

$\overrightarrow{AB} = (5-3;-6-(-4);\ 8-7) = (2;-2;1)$. Пусть $E(x;y;z)$, тогда $x = \dfrac{5+3}{2} = 4$, $y = \dfrac{-6+(-4)}{2} = -5$, $z = \dfrac{7+8}{2} = 7{,}5$. Таким образом, координаты точки $E(4;-5;7{,}5)$.

Пример 2.2. Даны два вектора $\vec{a} = (8;-7;-2)$, $\vec{b} = (7;-11;8)$. Найти угол между ними.

Решение. По формуле (2.5) получаем:

$$\cos\varphi = \frac{8\cdot 7 + (-7)\cdot(-11) + (-2)\cdot 8}{\sqrt{8^2 + (-7)^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{7^2 + (-11)^2 + 8^2}} = \frac{117}{117\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

тогда $\varphi = 45°$.

Пример 2.3. Доказать, что векторы $\vec{a} = (2;-4;6)$, $\vec{b} = (3;3;1)$ ортогональны.

Решение. По формуле (2.4) находим:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 3 + (-4)\cdot 3 + 6\cdot 1 = 0$. Согласно критерию ортогональности векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

Пример 2.4. Даны два вектора $\vec{a} = (5;3;-4)$, $\vec{b} = (6;7;-8)$. Найти векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$.

Решение. По формуле (2.7) получаем:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 3 & -4\\ 6 & 7 & -8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 7 & -8\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}5 & -4\\ 6 & -8\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}5 & 3\\ 6 & 7\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=4\cdot\vec{i}+16\cdot\vec{j}+17\cdot\vec{k}.$$

Следовательно, $\vec{a}\times\vec{b}=(4;16;17)$.

Пример 2.5. Вершины треугольника находятся в точках $A(1;\ 1;\ 3)$, $B(3;-1;6)$, $C(5;\ 1;-3)$. Вычислить площадь треугольника.

Решение. Используя формулу (2.1), находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}=(2;-2;3)$, $\overrightarrow{AC}=(4;0;-6)$. Далее, по формуле (2.7) определим $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & -6\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\right)=(12;24;8).$$

Тогда $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{784}=\frac{1}{2}28=14$.

Пример 2.6. Вычислить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\beta\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарны.

Решение. Соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны, т. е. $\frac{\alpha}{1}=\frac{7}{\beta}=\frac{3}{2}$, откуда находим $\alpha=\frac{3}{2}$ и $\beta=\frac{14}{3}$.

Пример 2.7. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(2;1;3)$, $\vec{b}=(1;3;1)$, $\vec{c}=(3;1;2)$.

Решение. По формуле (2.10) $V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$. Используя формулу (2.9), найдем $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-13.$$ Следовательно, $V=|-13|=13$.

Пример 2.8. Доказать, что векторы $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(4;-5;6)$, $\vec{c}=(5;-7;9)$ компланарны.

Решение. Проверим выполнение условия компланарности. Так как $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 5 & -7 & 9 \end{vmatrix} = 0$, то можно утверждать, что данные векторы компланарны.

Пример 2.9. Вычислить объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(6;1;4)$, $B(1;-3;7)$, $C(7;1;3)$, $D(2;-2;-5)$.

Решение. Используя формулу (2.1), найдем координаты векторов, на которых построена пирамида:

$\overrightarrow{AB} = (-5;-4;3)$, $\overrightarrow{AC} = (-4;-3;-9)$, $\overrightarrow{AD} = (1;0;-1)$.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6}V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -5 & -4 & 3 \\ -4 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{23}{3}.$$

Пример 2.10. Выяснить, лежат ли точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(6;1;3)$ в одной плоскости.

Решение. Используя формулу (2.1), найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB} = (3;-1;6)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;0;2)$, $\overrightarrow{AD} = (5;-1;4)$. Теперь проверим выполнение критерия компланарности. Так как $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, то векторы компланарны, а значит, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Пример 2.11. Выяснить, правой или левой будет тройка векторов $\vec{a} = (3;4;0)$, $\vec{b} = (0;-4;1)$, $\vec{c} = (0;2;5)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.9):

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -66.$$

Согласно свойствам смешанного произведения знак «–» указывает на то, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют левую тройку.

2.2. Различные виды уравнений плоскости

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$, перпендикулярный плоскости, называется ее *нормальным вектором* и определяет ориентацию плоскости в пространстве относительно системы координат.

Виды уравнений плоскости:

1) уравнение плоскости по точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, лежащей в плоскости, и вектору нормали $\vec{n} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \qquad (2.11)$$

2) общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0; \qquad (2.12)$$

3) уравнение плоскости в «отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (2.13)$$

где a, b, c – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат;

4) уравнение плоскости по трем точкам $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, лежащим в плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.14)$$

Косинус угла φ между двумя плоскостями определяется как косинус угла между нормальными векторами этих плоскостей $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (2.15)$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (2.16)$$

Пример 2.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;2)$ перпендикулярно к вектору $\vec{n}(5;4;2)$.

Решение. Запишем уравнение плоскости, воспользовавшись формулой (2.11): $5(x-2)+4(y+3)+2(z-2)=0$.

Раскрыв скобки, получим: $5x+4y+2z-2=0$.

Пример 2.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки с координатами $(-2;\,1;4)$ и $(3;2;5)$.

Решение. По условию плоскость проходит через три точки $M_1(0;\,0;0)$, $M_2(-2;\,1;\,4)$, $M_3(3;\,2;\,5)$. Воспользуемся формулой (2.14):

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -2-0 & 1-0 & 4-0 \\ 3-0 & 2-0 & 5-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -3x+22y-7z.$$

Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид:

$-3x+22y-7z=0$.

Пример 2.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5;3;2)$ и параллельной двум векторам $\vec{a}(4;\,1;\,2)$ и $\vec{b}(5;\,3;\,1)$.

Решение. Координаты вектора нормали найдем как векторное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по формуле (2.7):

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k}.$$

Теперь по формуле (2.11) составим уравнение плоскости: $-5(x-5)+6(y-3)+7(z-2)=0$.

Окончательно имеем: $-5x+6y+7z-7=0$.

Пример 2.15. Найти угол между плоскостями $x-2y+2z+3=0$ и $x+z-5=0$.

Решение. Нормальные вектора исходных плоскостей $\vec{n}_1(1;-2;3)$ и $\vec{n}_2(1;0;1)$. Воспользуемся формулой (2.15):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1+(-2)\cdot 0+3\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{28}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Тогда $\varphi = \arccos\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

Пример 2.16. Найти расстояние от точки $A(-3;1;2)$ до плоскости $6x-3y-6z+7=0$.

Решение. По формуле (2.16) имеем:

$$d=\frac{|6\cdot(-3)+(-3)\cdot 1+(-6)\cdot 2+7|}{\sqrt{36+9+36}}=\frac{26}{9}.$$

2.3. Различные виды уравнений прямой в пространстве

Вектор $\vec{s}(m;n;p)$, параллельный данной прямой, называется ее *направляющим вектором.*

Виды уравнений прямой в пространстве:

1) каноническое уравнение прямой (по точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и направляющему вектору $\vec{s}(m;n;p)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}; \tag{2.17}$$

2) параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt; \end{cases} \tag{2.18}$$

3) уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}; \tag{2.19}$$

4) общее уравнение прямой (прямая является результатом пересечения двух плоскостей):

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Решая эту систему, можно найти координаты точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, лежащей на этой прямой, а координаты направляющего вектора вычислить по формуле

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad (2.21)$$

Косинус угла между двумя прямыми в пространстве определяется как косинус угла между их направляющими векторами.

Пример 2.17. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3; -2; 5)$ и $M_2(6; 1; 7)$.

Направляющим вектором прямой выберем вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (3; 3; 2)$. Следовательно, по формуле (2.18): $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$

Пример 2.18. Определить угол между прямыми $\frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-4}$.

Решение. Направляющие вектора исходных прямых $\overrightarrow{s_1}(2; 1; -2)$ и $\overrightarrow{s_2}(1; -1; 4)$. Косинус угла между двумя прямыми в пространстве определяется как косинус угла между их направляющими векторами. Следовательно, по формуле (2.5):

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+1+4}} = \frac{7}{9\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{54}.$$

Тогда $\varphi = \arccos\frac{7\sqrt{6}}{54}$.

2.4. Прямая на плоскости

Различные виды уравнений прямой на плоскости:

1) общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0; \qquad (2.22)$$

2) уравнение по точке $M_0(x_0; y_0)$ и угловому коэффициенту k, где $k = \operatorname{tg}\alpha$ (α – угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox):

$$y - y_0 = k(x - x_0); \qquad (2.23)$$

3) уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b; \qquad (2.24)$$

4) параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \qquad (2.25)$$

где $\vec{s}(m; n)$ – направляющий вектор прямой, $M_0(x_0; y_0)$ – точка, лежащая на прямой;

5) каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}; \qquad (2.26)$$

6) уравнение прямой в «отрезках по осям»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \qquad (2.27)$$

7) уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (2.28)$$

Тангенс угла между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (2.29)$$

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 k_2 = -1$.

Условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.30)$$

Пример 2.19. Для прямой $3x - 4y - 12 = 0$ записать ее уравнение в «отрезках по осям».

Решение. Преобразуем исходное уравнение прямой: $3x-4y=12$. Теперь правую и левую части равенства разделим на 12: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$. Получили уравнение прямой, которое соответствует уравнению (2.27).

Пример 2.20. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2;5)$ и $B(3;\,8)$.

Решение. По формуле (2.28) имеем: $\frac{x+2}{3+2}=\frac{y-5}{8-5}$, откуда $\frac{x+2}{5}=\frac{y-5}{3}$. Окончательно получим $3x-5y+31=0$.

Пример 2.21. Доказать, что прямые $2x+3y+1=0$ и $6x-4y+3=0$ взаимно перпендикулярны.

Решение. Приведем уравнения исходных прямых к виду (2.24): $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ и $y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$. Запишем угловые коэффициенты: $k_1=-\frac{2}{3}$ и $k_2=\frac{3}{2}$. Так как $k_1k_2=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=-1$, то данные прямые перпендикулярны.

3. ПРЕДЕЛЫ

Если каждому натуральному числу n по определенному закону ставится в соответсятвие действительное число a_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* $\{a_n\}$. Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}=1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$.

Число a называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ найдется номер N (зависящий от ε), такой, что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ выполняется неравенство $|a_n-a|<\varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Последовательность, имеющую предел, называют *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*. Последовательность, предел которой равен нулю, называют *бесконечно малой*, а последовательность, предел которой равен бесконечности, – *бесконечно* *большой*. Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, а последовательность $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ является бесконечно большой, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\infty$.

Для сходящихся последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, имеют место следующие теоремы о пределах:

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$; $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=ca$;

$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=ab$; $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}\ (b_n\neq 0\ \ \forall n,\ \ b\neq 0)$.

Число b называется *пределом функции* $y=f(x)$ в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, сходящейся к числу a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b.

Из определения предела функции следует, что все теоремы о пределах последовательностей можно обобщить на случай предела функций.

Первым замечательным пределом называют предел вида

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{3.1}$$

Следствия первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1; \tag{3.2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m; \tag{3.3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}; \tag{3.4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1; \tag{3.5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1; \tag{3.6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1. \qquad (3.7)$$

Вторым замечательным пределом называют предел вида

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=2{,}71828\ldots. \qquad (3.8)$$

Следствия второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{kx}=e^{k}; \qquad (3.9)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x}=e^{m}; \qquad (3.10)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}; \qquad (3.11)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a; \qquad (3.12)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1; \qquad (3.13)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (3.14)$$

Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Если отношение двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ стремится к единице при $x\to a$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* при $x\to a$, что обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

На основании приведенных определений, а также первого и второго замечательных пределов и их следствий, можно записать следующие *соотношения эквивалентности* при $x\to 0$:

$$\sin x\sim x; \qquad (3.15)$$

$$\operatorname{tg} x\sim x; \qquad (3.16)$$

$$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}; \qquad (3.17)$$

$$\ln(1+x) \sim x; \qquad (3.18)$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim x/n; \qquad (3.19)$$

$$\arcsin x \sim x; \qquad (3.20)$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x; \qquad (3.21)$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a; \qquad (3.22)$$

$$e^x - 1 \sim x; \qquad (3.23)$$

$$(1+x)^b - 1 \sim bx; \qquad (3.24)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}. \qquad (3.25)$$

Техника вычисления пределов

При нахождении предела $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые (бесконечно большие) функции при $x \to a$, принято говорить, что отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ представляет собой *неопределенность вида* $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ (соответственно, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$). Аналогично вводятся неопределенности вида $(\infty - \infty)$, $(0 \cdot \infty)$, а также (1^∞), (0^0) и (∞^0), которые встречаются при нахождении пределов $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x))$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x \to a}(f(x))^{g(x)}$. Отыскание предела в таких случаях называют *раскрытием неопределенности*.

1. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

К таким неопределенностям приводит, как правило, вычисление пределов вида $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – функции целой или дробной степени переменной x. Для вычисления пределов такого вида необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на x в наивысшей степени, содержащейся во всем выражении.

Пример 3.1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 + 2x - 4}{2x^3 - 5x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x-1)(x+3)}{\sqrt{x^4 + 2x + 4} + 5x^2}$.

Решение: а) При подстановке предельного значения в функцию получаем неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-4}{2x^3-5x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}}{2-\frac{5}{x^2}}=\frac{3+0-0}{2-0}=\frac{3}{2};$$

б) Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)(x+3)}{\sqrt{x^4+2x+4}+5x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}\cdot\frac{x+3}{x}}{\frac{\sqrt{x^4+2x+4}}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{\frac{x^4+2x+4}{x^4}}+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^4}}+5}=\frac{2\cdot 1}{1+5}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Если деление на старшую степень представляется затруднительным, то при вычислении предела вида $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно воспользоваться следующим правилом:

– предел равен нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя;

– предел равен бесконечности, если степень числителя больше степени знаменателя;

– предел равен отношению коэффициентов при старших степенях, если степени числителя и знаменателя равны.

Пример 3.2. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{2+3n}+\sqrt[3]{n^4}+5n}{n\sqrt{n+6}+8n}$.

Решение. Старшая степень числителя $k=\max(1/4,\,4/3,\,1)=4/3$, старшая степень знаменателя $m=\max(1\frac{1}{2},\,1)=1\frac{1}{2}$. Так как $4/3<1\frac{1}{2}$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{2+3n}+\sqrt[3]{n^4}+5n}{n\sqrt{n+6}+8n}=0$.

Пример 3.3. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!-(n-1)!}$.

Решение. Необходимо напомнить, что $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, $(n+1)!=n!(n+1)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)!-(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n(n+1)(n+2)}{(n-1)!(n(n+1)-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!(n^3+3n^2+2n)}{(n-1)!(n^2+n-1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+2n}{n^2+n-1}=\infty.$$

2. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

2.1. Пределы вида $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени, соответственно, n и m. Общий прием в таких случаях – разделить числитель и знаменатель дроби на бином $(x - a)$, после чего опять подставить предельное значение. Если неопределенность сохраняется, процедуру повторить. Во многих случаях удается выделить в числителе и знаменателе критический множитель $(x - a)$, применяя алгебраические преобразования, формулы сокращенного умножения и разложение на множители квадратного трехчлена:

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

где $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, $D=b^2-4ac$.

Пример 3.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x-10}{3x^2-4x-4}$.

Решение. Разделим числитель на знаменатель в столбик:

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} 2x^3-3x-10 \\ \underline{2x^3-4x^2\qquad\quad} \end{array} & \begin{array}{|l} \underline{x-2\qquad\quad} \\ 2x^2+4x+5. \end{array} \\
\quad -\begin{array}{l} 4x^2-3x-10 \\ \underline{4x^2-8x\qquad} \end{array} & \\
\qquad\quad -\begin{array}{r} 5x-10 \\ \underline{5x-10} \\ 0 \end{array} &
\end{array}
$$

Найдем корни квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, и разложим его на множители: $3x^2-4x-4=3(x-2/3)(x-2)$. Тогда

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-3x-10}{3x^2-4x-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(2x^2+4x+5)(x-2)}{3(x-2/3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+4x+5}{3x-2}=\frac{21}{2}.$$

2.2. Пределы вида $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – функции, содержащие иррациональность.

Пример 3.5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{2x-3}}{x^3-27}$.

Решение. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю, а выражение x^3-27 разложим на множители:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{2x+3}}{x^3-27}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(3-\sqrt{2x+3})(3+\sqrt{2x+3})}{(x^3-27)(3+\sqrt{2x+3})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3^2-(2x+3)}{(x-3)(x^2+3x+9)(3+\sqrt{2x+3})}=\lim_{x\to 3}\frac{6-2x}{(x-3)(x^2+3x+9)(3+\sqrt{2x+3})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-2(x-3)}{(x-3)(x^2+3x+9)(3+\sqrt{2x+3})}=\lim_{x\to 3}\frac{-2}{(x^2+3x+9)(3+\sqrt{2x+3})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-2}{(3^2+3\cdot 3+9)(3+\sqrt{2\cdot 3+3})}=-\frac{2}{27\cdot 6}=-\frac{1}{81}.$$

2.3. Пределы, содержащие тригонометрические функции, решаются сведением к первому замечательному пределу (3.1) с помощью преобразований тригонометрических выражений, а также деления числителя и знаменателя на x в соответствующей степени.

Пример 3.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}$.

Решение. Воспользуемся формулой $1-\cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, а затем разделим числитель и знаменатель дроби на x^2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{2\sin^2\dfrac{4x}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{\sin 3x}{x}}{\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}}=$$

$$=[\text{применим следствие (3.3)}]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{x}}{\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2^2}=\frac{3}{8}.$$

Этот же предел можно вычислить, воспользовавшись эквивалентными бесконечно малыми (3.15) и (3.25):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix}\sin 3x\sim 3x\\ 1-\cos 4x\sim\dfrac{(4x)^2}{2}\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 3x}{16x^2/2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{8x^2}=\frac{3}{8}.$$

Эквивалентные бесконечно малые также удобно применять при нахождении пределов, содержащих логарифмические и показательные функции.

Пример 3.7. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x^2+\mathrm{arctg}^2 3x}{\ln(2x^2+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{-x}-3^{2x}}{x}$.

Решение: а) Воспользуемся эквивалентными бесконечно малыми (3.18), (3.20), (3.21):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x^2+\mathrm{arctg}^2 3x}{\ln(2x^2+1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix}\arcsin 5x^2\sim 5x^2\\ \mathrm{arctg}^2 3x\sim(3x)^2\\ \ln(2x^2+1)\sim 2x^2\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+9x^2}{2x^2}=\frac{14}{2}=7;$$

б) Для того чтобы воспользоваться формулой (3.22), в числителе дроби добавим и отнимем единицу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{-x}-3^{2x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(2^{-x}-1)-(3^{2x}-1)}{x}=\begin{bmatrix}2^{-x}-1\sim -x\ln 2\\ 3^{2x}-1\sim 2x\ln 3\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\ln 2-2x\ln 3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x(\ln 2+2\ln 3)}{x}=-(\ln 2+2\ln 3)=$$

$$=-(\ln 2+\ln 3^2)=-\ln 2\cdot 3^2=-\ln 18.$$

Пример 3.8. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{4-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\pi-x}$.

Решение: а) Так как $\sin(x-2)\to 0$ при $x\to 2$, то можно применить формулу (3.15):

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{4-x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\sin(x-2)\sim x-2\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(2-x)(2+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2+x}=-\frac{1}{4};$$

б) При подстановке $x=\pi$ получаем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Сделаем замену $t=\pi-x$. Тогда $x=\pi-t$, причем $t\to 0$ при $x\to\pi$.

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\pi-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3(\pi-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}(3\pi-3t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}(-3t)}{t}=$$

$$=\begin{bmatrix}\operatorname{tg}(-3t)\sim -3t\\ \text{при } t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{-3t}{t}=-3.$$

3. Раскрытие неопределенностей вида $(\infty-\infty)$.

Пример 3.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность $(\infty-\infty)$. Умножим и разделим выражение на сопряженный множитель $(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x})$. Получим:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

4. Неопределенности вида $(0\cdot\infty)$ часто удается свести к неопределенностям $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 3.10. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin 3x \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$.

Решение: а) При подстановке значения $x=0$ в функцию получаем неопределенность $(0\cdot\infty)$. Воспользуемся формулой $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \arcsin 3x \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{5} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg}\frac{x}{5}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \begin{bmatrix} \arcsin 3x \sim 3x \\ \operatorname{tg}\frac{x}{5}\sim\frac{x}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x/5} = 3\cdot 5 = 15;$$

б) Принимая во внимание, что $x = \frac{1}{1/x}$, имеем:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin(1/x)}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \begin{bmatrix} \sin(1/x)\sim 1/x, \\ \text{так как } \frac{1}{x}\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/x} = 1.$$

5. Неопределенности вида $\left(1^\infty\right)$ с помощью преобразований приводятся ко второму замечательному пределу (3.8).

Пример 3.11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+5}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{2x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}} = \frac{2}{2} = 1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5) = \infty$, то имеем неопределенность (1^∞). Выделим в числителе выражение, равное знаменателю, и разделим почленно числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+5}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+3)-2}{2x+3}\right)^{3x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)^{3x+5}.$$

Приведем это выражение к виду $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}$, чтобы использовать второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)^{3x+5}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2(3x+5)}{2x+3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-2(3x+5)}{2x+3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x-10}{2x+3}}=e^{\frac{-6}{2}}=e^{-3}.$$

Для раскрытия неопределенности (1^{∞}) можно также воспользоваться формулой

$$\lim_{x\to a}\left(u(x)\right)^{v(x)}=(1^{\infty})=e^{\lim\limits_{x\to a}(u(x)-1)\cdot v(x)}. \tag{3.26}$$

Пример 3.12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 3x\right)^{1/\sin^2 x}$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.26) и эквивалентными бесконечно малыми (3.15) и (3.25):

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos 3x\right)^{1/\sin^2 x}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x-1)\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\cos 3x-1\sim-\dfrac{(3x)^2}{2}\\ \sin^2 x\sim x^2\end{array}\right]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9x^2/2}{x^2}}=e^{-9/2}=\frac{1}{\sqrt{e^9}}.$$

Для раскрытия неопределенностей вида (0^0) и (∞^0) применяют правило Лопиталя, которое будет рассмотрено ниже.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Таблица производных. Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – некоторые функции аргумента x. Правила дифференцирования:

$$(Cu)' = Cu'; \tag{4.1}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \tag{4.2}$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \tag{4.3}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{4.4}$$

Таблица производных:

1. $c' = 0$.
2. $x' = 1$.
3. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha - 1} u'$.
4. $\left(e^{u}\right)' = e^{u} u'$.
5. $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \ln a \cdot u'$.
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$.
7. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$.
8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
10. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$.
11. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$.
12. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u'$.
13. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u'$.
14. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1 + u^2} u'$.
15. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1 + u^2} u'$.
16. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.
17. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.
18. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} u'$.
19. $(\operatorname{cth} u)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} u'$.

Пример 4.1. Найти производные функций:

а) $y = 2x^4 + 5x - \frac{2}{3} + \frac{4}{x^3} + \frac{3x^2}{\sqrt{x}}$; б) $y = \left(x^2 + 1\right) \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \sin^3 2x$; г) $y = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$.

Решение: а) Преобразуем функцию, введя дробные и отрицательные показатели степени, а затем применим формулы (4.1) и (4.2), а также равенства (1–3) таблицы производных:

$$y' = \left(2x^4 + 5x - \frac{2}{3} + 4x^{-3} + 3x^{3/2}\right)' = 8x^3 + 5 - 0 + 4 \cdot (-3)x^{-4} + 3 \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} =$$

$$= 8x^3 + 5 - \frac{12}{x^4} + \frac{9}{2}\sqrt{x};$$

б) Используем таблицу производных и формулу (4.3):

$$y' = \left(\left(x^2 + 1\right) \operatorname{arctg} x\right)' = \left(x^2 + 1\right)' \operatorname{arctg} x + \left(x^2 + 1\right) \left(\operatorname{arctg} x\right)' =$$

$$= 2x \cdot \operatorname{arctg} x + \left(x^2 + 1\right) \frac{1}{1 + x^2} = 2x \cdot \operatorname{arctg} x + 1;$$

в) $y' = \left(\sin^3 2x\right)' = \left((\sin 2x)^3\right)' = 3(\sin 2x)^2 (\sin 2x)' =$

$$= 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x (2x)' = 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6\sin^2 2x \cdot \cos 2x.$$

Здесь сначала взята производная степенной функции с основанием $\sin 2x$, затем производная синуса и на последнем этапе производная его аргумента. Нет необходимости расписывать все эти действия подробно, результат можно записать сразу, т. е.

$$y' = \underbrace{3\sin^2 2x}_{} \cdot \underbrace{\cos 2x}_{} \cdot \underbrace{2}_{}.$$

Здесь фигурными скобками выделены указанные производные;

г) Воспользуемся формулой (4.4):

$$y' = \frac{\left(\ln(x^2 + 1)\right)' x^2 - \ln(x^2 + 1)\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x^2+1} 2x \cdot x^2 - \ln(x^2+1)2x}{x^4} = \frac{\frac{2x^3}{x^2+1} - 2x\ln(x^2+1)}{x^4} =$$

$$= \frac{2}{x(x^2+1)} - \frac{2\ln(x^2+1)}{x^3}.$$

Логарифмическое дифференцирование. Производные неявных функций и функций, заданных параметрически

Логарифмическое дифференцирование заключается в том, что сначала данную функцию логарифмируют, а затем уже приступают к дифференцированию. Оно используется при нахождении производной показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$. Его также целесообразно применять, когда заданная функция содержит операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. При этом используются свойства логарифмов:

$$\ln uv = \ln u + \ln v; \quad \ln\frac{u}{v} = \ln u - \ln v; \quad \ln u^v = v\ln u.$$

Пример 4.2. Найти производную функции $y = (\cos x)^{\sin x}$.

Решение

1. Логарифмируем данную функцию по основанию e:

$$\ln y = \ln(\cos x)^{\sin x}.$$

2. Воспользовавшись свойством логарифма $\ln u^v = v\ln u$, получим:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(\cos x).$$

3. Дифференцируем обе части этого равенства по x, учитывая, что y есть функция аргумента x, и обращая внимание на правую часть равенства, где записано произведение двух функций:

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \text{tg}\, x.$$

4. Умножим обе части последнего равенства на y и, учитывая, что $y=(\cos x)^{\sin x}$, получаем:

$$y'=(\cos x)^{\sin x}(\cos x\cdot\ln(\cos x)-\sin x\cdot \operatorname{tg} x).$$

Если зависимость между переменными x и y задана уравнением $F(x,y)=\Phi(x,y)$, то говорят, что функция $y(x)$ задана *неявно*. Для нахождения производной y'_x такой функции дифференцируют обе части данного уравнения по x и получают уравнение относительно y'_x. Затем из этого уравнения находят y'_x.

Пример 4.3. Найти производную y'_x неявной функции, заданной уравнением $x^3+y^3=2x^2y+1$.

Решение

1. Дифференцируем обе части уравнения по переменной x, считая y функцией аргумента x (тогда $x'=1$, а $y'=y'_x$). Получим:

$3x^2\cdot 1+3y^2y'_x=2\left(2xy+x^2y'_x\right)+0$.

2. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Затем перенесем слагаемые, содержащие y'_x, в левую сторону и вынесем y'_x за скобки:

$\left(3y^2-2x^2\right)y'_x=4xy-3x^2$. Отсюда $y'_x=\dfrac{4xy-3x^2}{3y^2-2x^2}$.

Функция $y(x)$ является заданной *параметрически*, если x и y заданы как функции параметра t:

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}.$$

Если $x(t)$ и $y(t)$ – дифференцируемые функции и $x'_t\neq 0$, то производная y'_x может быть найдена по формуле

$$y'_x=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}. \qquad (4.5)$$

Пример 4.4. Найти производную y'_x функции, заданной параметрически $\begin{cases}x=\operatorname{arctg} e^t\\ y=e^{-t}.\end{cases}$

Решение. Найдем x'_t и y'_t:

$$x'_t = \frac{1}{1+\left(e^t\right)^2} e^t = \frac{e^t}{1+e^{2t}},$$

$$y'_t = e^{-t}(-1) = -e^{-t}.$$

Воспользовавшись формулой (4.5), получаем:

$$y'_x = e^{-t} : \frac{e^t}{1+e^{2t}} = \frac{e^{-t}(1+e^{2t})}{e^t} = \frac{e^{-t}+e^t}{e^t} = e^{-2t} + 1.$$

4.2. Правило Лопиталя

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемые функции. Если $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно большими или бесконечно малыми при $x \to a$, тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.6}$$

при условии, что предел отношения производных существует.

Когда отношение производных приводит снова к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то правило Лопиталя применяют к этому отношению еще раз. Перед его повторным применением рекомендуется произвести все допустимые упрощения.

Пример 4.5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos mx)}{\ln(\cos nx)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sh} x} - \dfrac{1}{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1+0} \ln x \ln(x-1)$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^2+1\right)^{1/x}$.

Решение:

$$\text{а)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos mx)}{\ln(\cos nx)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln(\cos mx)\right)'}{\left(\ln(\cos nx)\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos mx}(-\sin mx)m}{\frac{1}{\cos nx}(-\sin nx)n} =$$

$$= \frac{m}{n} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\operatorname{tg} nx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} mx \sim mx \\ \operatorname{tg} nx \sim nx \end{bmatrix} = \frac{m}{n} \lim_{x\to 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m^2}{n^2};$$

б) Имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$, которую, приведя разность к общему знаменателю, сведем к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ и воспользуемся правилом Лопиталя дважды:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sh} x}{x\cdot\operatorname{sh} x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x+x\cdot\operatorname{ch} x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\operatorname{ch} x)'}{(\operatorname{sh} x+x\cdot\operatorname{ch} x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x+\operatorname{ch} x+x\cdot\operatorname{sh} x}=\frac{0}{2}=0;$$

в) При подстановке значения $x=1$ в функцию получаем неопределенность вида $(0\cdot\infty)$, которую можно свести к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ с помощью алгебраических преобразований, а затем применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1+0}\ln x\ln(x-1)=\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln(x-1)}{(\ln x)^{-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 1+0}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-(\ln x)^{-2}\cdot\dfrac{1}{x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 1+0}\frac{x\ln^2 x}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to 1+0}\frac{\left(x\ln^2 x\right)'}{(x-1)'}=-\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln^2 x+x\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{1}=0;$$

г) Имеем неопределенность вида $\left(\infty^0\right)$, которую можно свести к неопределенности $(0\cdot\infty)$ с помощью тождества $u^v=e^{v\ln u}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)^{1/x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}}.$$

Здесь знак предела и знак функции поменяли местами на основании непрерывности показательной функции.

Вычислим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x}=0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)^{1/x}=e^0=1$.

Аналогичным образом раскрываются неопределенности $\left(0^0\right)$ и $\left(1^\infty\right)$.

4.3. Приложение производной к исследованию функций

Монотонность и локальные экстремумы функции

Монотонной на интервале (a; b) называется функция, которая не возрастает (не убывает) всюду на данном интервале.

Признак монотонности функции: функция $f(x)$, дифференцируемая на интервале (a; b), не убывает (не возрастает) на этом интервале тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ всюду на этом интервале.

Необходимое условие экстремума: если функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Внутренние точки области определения функции $f(x)$, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими точками*.

Первое достаточное условие экстремума: если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0, а ее производная $f'(x)$ при переходе через эту точку меняет знак с «+» на «–» (с «–» на «+»), то в точке x_0 функция имеет локальный максимум (минимум).

Второе достаточное условие экстремума: если в критической точке x_0 функция $f(x)$ дважды дифференцируема и $f''(x_0) < 0$ $\left(f''(x_0) > 0\right)$, то в этой точке функция имеет локальный максимум (минимум).

Пример 4.6. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Вычислим производную:

$$y' = \left(\frac{x}{3} - x^{2/3}\right)' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Найдем критические точки, приравняв к нулю числитель и знаменатель:

$$\sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8,$$

$$\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Обе эти точки являются критическими, так как являются внутренними точками области определения функции.

Определим знак производной на каждом из интервалов $(-\infty; 0)$, $(0;\, 8)$ и $(8; +\infty)$:

знак y'	$+$		$-$		$+$
		0		8	
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(8; +\infty)$ и убывает на интервале $(0;\, 8)$. При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с «+» на «–», следовательно, в этой точке достигается локальный максимум, $y_{\max} = 0$. При переходе через точку $x = 8$ производная меняет знак с «–» на «+», значит, $x = 8$ – точка минимума, $y_{\min} = \frac{8}{3} - \sqrt[3]{8^2} = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$, на котором она непрерывна, надо: найти критические точки, принадлежашие интервалу $(a;\, b)$, и вычислить значения функции в этих точках; вычислить значения функции в граничных точках отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$; из всех полученных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

Пример 4.7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на отрезке [1; 2].

Решение. Вычислим производную функции и найдем критические точки.

$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$.

Производная обращается в ноль в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 3$, но $x_3 \notin (-1;\, 2)$. Следовательно, вычисляем значение функции в критических точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, а также на концах отрезка. Получим:

$f(0) = 1$, $f(1) = 1 - 5 + 5 + 1 = 2$, $f(-1) = -1 - 5 - 5 + 1 = -10$, $f(2) = 32 - 5 \cdot 16 + 5 \cdot 8 + 1 = -7$. Таким образом, в точке $x = 1$ функция принимает наибольшее значение $f_{\text{наиб}} = f(1) = 2$, а в точке $x = -1$ она принимает наименьшее значение $f_{\text{наим}} = f(-1) = -10$.

Интервалы выпуклости и вогнутости. Точки перегиба

Кривая *выпукла* (*вогнута*) на интервале $(a;\, b)$, если все точки кривой лежат ниже (выше) любой ее касательной на этом интервале.

Условие выпуклости (*вогнутости*): если функция $f(x)$ на интервале $(a;\, b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) всюду на этом интервале, то график функции выпуклый (вогнутый) на $(a;\, b)$.

Точка, отделяющая промежутки выпуклости и вогнутости кривой друг от друга, называется *точкой перегиба*.

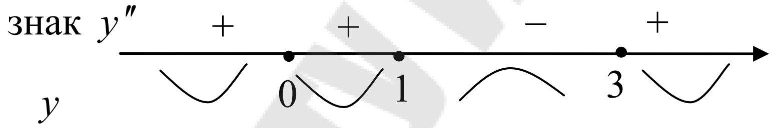
Достаточное условие существования точки перегиба: если при $x = x_0$ вторая производная функции $f(x)$ не существует или равна нулю и при переходе через $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой x_0 есть точка перегиба графика функции $f(x)$.

Пример 4.8. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = x^6 - 6x^5 + 7{,}5x^4 + 3x$.

Решение. Найдем вторую производную заданной функции:

$$y'' = \left(x^6 - 6x^5 + 7{,}5x^4 + 3x\right)'' = \left(6x^5 - 30x^4 + 30x^3 + 3\right)' =$$
$$= 30x^4 - 120x^3 + 90x^2 = 30x^2(x-1)(x-3).$$

Вторая производная обращается в ноль в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 3$. Все эти точки принадлежат области определения функции, $f(0) = 0$, $f(1) = 5{,}5$, $f(3) = 112{,}5$. Исследуем знак второй производной:



Отсюда заключаем, что график функции является выпуклым на интервале (1; 3), вогнутым на интервалах $(-\infty; 0)$, (0; 1) и $(3; +\infty)$. Точки (1; 5,5) и (3; 112,5) являются точками перегиба. Точка (0; 0) не является точкой перегиба.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

1. Найти значение многочлена $f(A)$, если $f(x)=x^2-2x+1$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

3. Выяснить, лежат ли точки $A(1;2;-1)$, $B(2;1;5)$, $C(1;2;1)$, $D(-6;1;3)$ в одной плоскости.

4. Найти расстояние от точки $A(7;-3;0)$ до плоскости $5x+3y-2z+13=0$.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!-(n+1)!}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-7x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{4/\left(x^2-1\right)}$.

6. Вычислить производную y'_x:

а) $y=\sqrt[3]{3x+2}-\dfrac{5}{x^2}$; б) $y=x^2\cdot\ln^2 x$;

в) $y=\cos^3\dfrac{x}{2}$; г) $y=(\sin x)^{\arcsin x}$.

7. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x\sqrt{1-x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{6/(1+2\ln x)}$.

8. Найти точки экстремума функции $y=2x^2-\ln x$.

Ответы: **1**. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. **2**. (1; 3; –1). **3**. Нет. **4**. $\dfrac{39}{\sqrt{38}}$. **5**. а) –1; б) $\dfrac{2}{9}$; в) $\dfrac{1}{4}$; г) e^4. **7**. а) $\ln\dfrac{3}{2}$; б) e^3. **8**. $x=\dfrac{1}{2}$ – точка минимума, $y_{\min}=\dfrac{1}{2}+\ln 2$.

Вариант 2

1. Вычислить $A^T B + 3C$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

3. Проверить, будут ли векторы $\vec{a} = (3; -2; 5)$, $\vec{b} = (-3; 2; 1)$ ортогональны.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3; -3; 7)$ и параллельной двум векторам: $\vec{a}(-4; 3; -2)$ и $\vec{b}(2; -3; 5)$.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 + 6x + 1}{7x^3 + 2x}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - n + 1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + 6x)}{\sin 7x}$; г) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2 - 7x - 4}{x^3 - 64}$.

6. Вычислить производную y'_x:

а) $y = 2x^4 + 3x\sqrt[3]{x} - \dfrac{5}{x^4}$; б) $y = \sin^4(3x - 1)$;

в) $y = e^{3x} \cdot \operatorname{tg} 4x$; г) $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$.

7. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x + 5)}{\sqrt[3]{x + 3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0} (x - 1)^{x-1}$.

8. Найти точки экстремума функции $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)^2}$.

Ответы: **1**. $\begin{pmatrix} 10 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$. **2**. (1; –3; –1). **3**. Нет. **4**. $9x + 16y + 6z + 33 = 0$. **5**. а) 3/7; б) 0; в) 6/7; г) 3/16. **7**. а) 0; б) 1. **8**. $x = 0$ – точка максимума, $x = 1$ и $x = -1$ – точки минимума, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = 0$.

Вариант 3

1. Найти значение многочлена $f(A)$, если $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

3. Даны два вектора $\vec{a} = (1;\ 3; -5)$, $\vec{b} = (4; -7;\ 8)$. Найти координаты векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2; -7; 0)$ перпендикулярно к вектору $\vec{n}(3; -1; 4)$.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{2n^2 + 4}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{5n+3}{5n-3} \right)^{2n-5}$;

в) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 1}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{\arcsin 2x}$.

6. Вычислить производную y'_x:

а) $y = \sqrt{2x+3} \cdot \ln(2x+3)$; б) $y = \arcsin^2 \sqrt{x}$;

в) $xy = e^{2x^2 + y}$; г) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$

7. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \cdot e^{-0,01x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$.

8. Найти промежутки монотонности функции $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

Ответы: **1**. $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. **2**. (0; –7; 5). **3**. (–11; –28; –19). **4**. $3x - y + 4z - 1 = 0$. **5**. а) 3; б) $e^{12/5}$; в) 2; г) 3/2. **7**. а) 0; б) 1. **8**. Возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$, убывает на $(0; 2)$.

Вариант 4

1. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 9, \\ -2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 12, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$$

3. Найти угол между векторами $\vec{a} = (3;1;1)$ и $\vec{b} = (1;1;5)$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2;\,1;\,4)$, $B(3;\,2;\,5)$, $C(0;-1;3)$.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1} - x\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-4}\right)^{3x-1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

6. Вычислить производную y'_x:

а) $y = \dfrac{5}{2x^2} + \dfrac{4}{x+1} - 3\sqrt[5]{x^2}$;

б) $y = \cos 2x \cdot \ln x$;

в) $y = \sqrt{\operatorname{tg}^5(2-3x)}$;

г) $\begin{cases} x = te^{-5t} \\ y = (5t-1)^3. \end{cases}$

7. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^x$.

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2;2]$.

Ответы: **1**. $\begin{pmatrix} 3/7 & 2/7 \\ -2/7 & 1/7 \end{pmatrix}$. **2**. (–1; –2; 0). **3**. $\arccos\sqrt{\dfrac{3}{11}}$. **4**. $x + 7y - 12z + 43 = 0$. **5**. а) –1; б) 0; в) ∞; г) 2. **7**. а) $-\sqrt{3}/3$; б) 1. **8**. $f_{\text{наиб}} = f(2) = f(-2) = 13$, $f_{\text{наим}} = f(1) = f(-1) = 4$.

Вариант 5

1. Найти значение многочлена $f(A)$, если $f(x)=3x^2+4x+1$, $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:
$$\begin{cases}8x_1+3x_2-6x_3=-4,\\ x_1+x_2-x_3=2,\\ 4x_1+x_2-3x_3=-5.\end{cases}$$

3. Вершины треугольника находятся в точках $A(-1;1;-3)$, $B(5;1;4)$, $C(3;-1;-2)$. Вычислить его площадь.

4. Составить уравнение прямой, параллельной вектору $\vec{s}(-2;5)$ и проходящей через точку $M_0(3;-5)$.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^3-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-4}\right)^{3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{\sin x+x^2}$.

6. Вычислить производную y'_x:

а) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+3\sqrt[4]{x}-6x^7$; б) $y=(2x+1)^4\cdot(x-3)^5$;

в) $y=\ln\left(2-\cos^2 x\right)$; г) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

7. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

8. Найти точки экстремума функции $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

Ответы: **1**. $\begin{pmatrix}7 & -10\\ -5 & 22\end{pmatrix}$. **2**. (1; 6; 5). **3**. $\sqrt{206}$. **4**. $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+5}{5}$. **5**. а) ∞; б) –1/48; в) $e^{15/2}$; г) –2. **7**. а) $25/9$; б) e. **8**. $x=0$ – точка минимума, $y_{\min}=-1$.

Вариант 6

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\4&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4\\1&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&0&-1\\4&2&2\end{pmatrix}$. Найти значение $A^T B-2C^T$.

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=12,\\3x_1+4x_2-2x_3=6,\\2x_1-x_2-x_3=-9.\end{cases}$$

3. Вычислить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}+\beta\vec{k}$ коллинеарны.

4. Найти угол между прямыми $x+2y-3=0$ и $2x-3y+5=0$.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x+2}{x^2+2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.

6. Вычислить производную y'_x:

а) $y=\dfrac{4}{(x-4)^4}+\sqrt{3x^2+x}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}4x}{x^2}$;

в) $y=\operatorname{tg}^5\left(x^3+1\right)$; г) $y=(x+1)^{\ln x}$.

7. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\pi/x}{\operatorname{ctg}\dfrac{5x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{1/(x-1)}$.

8. Найти точки перегиба функции $y=x^4-12x^3+48x^2-50$.

Ответы: **1**. $\begin{pmatrix}4&0\\2&0\\7&3\end{pmatrix}$. **2**. (0; 4; 5). **3**. $\alpha=5$, $\beta=-\dfrac{6}{5}$. **4**. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}$. **5**. а) 5/2; б) ∞; в) π; г) 0. **7**. а) 5/2; б) $e^{-\pi}$. **8**. $x=-2$ и $x=-4$ – точки перегиба.

Вариант 7

1. Найти значение многочлена $f(A)$, если $f(x) = -x^2 + x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 - 5x_2 + x_3 = -8, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 15, \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

3. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (2;4;3)$, $\vec{b} = (3;2;4)$, $\vec{c} = (3;1;2)$.

4. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(7;-2;3)$ и $M_2(-2;-1;5)$.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^6+4} + \sqrt{n+4}}{\sqrt[6]{n^6+6} - \sqrt{n+6}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\operatorname{arctg} 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x\sin x}$.

6. Вычислить производную y'_x:

а) $y = 3^{2x}(3+2x)$; б) $y = (1+\cos 3x)^3$;

в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7}$; г) $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

7. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^{1/x}$.

8. Найти промежутки монотонности функции $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

Ответы: **1**. $\begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. **2**. (3; –1; –4). **3**. 15. **4**. $\dfrac{x-7}{-9} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{2}$.

5. а) ∞; б) 1/4; в) 1/3; г) $e^{-1/2}$. **7**. а) 4/9; б) 1. **8**. Возрастает на $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$, убывает на $(-1;1)$.

Вариант 8

1. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:
$$\begin{cases} 4x_1-5x_2+2x_3=-6, \\ -2x_2-5x_3=-6, \\ 3x_1+x_3=-13. \end{cases}$$

3. Даны две точки $A(2;-3;1)$, $B(3;5;-1)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и координаты точки E – середины отрезка AB.

4. Записать уравнение плоскости $-5x+4y-10z+20=0$ в «отрезках по осям».

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2n}+n}{2n^2+\sqrt{n}-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-3\right)^{4/(x+2)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2+\sin 3x}$.

6. Вычислить производную y'_x:

а) $y=6x^3-6x\sqrt{x}+\dfrac{5}{\sqrt{x}}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$;

в) $y=\ln^3(2x^2-3x)$; г) $\begin{cases} x=1/(t+2) \\ y=t^2/(t+2)^2. \end{cases}$

7. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln 2x)^{1/\ln x}$.

8. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y=(x+2)e^{1+x}$.

Ответы: **1**. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 10 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **2**. (–5; –2; 2). **3**. $\overrightarrow{AB}(1;\,8;-2)$, $E(2{,}5;1;0)$. **4**. $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-5}+\dfrac{z}{2}=1$. **5**. а) 1/2; б) 1/24; в) e^{-16}; г) 0. **7**. а) –1/3; б) 1. **8**. Выпукла на $(-\infty;-4)$, вогнута на $(-4;+\infty)$.

Вариант 9

1. Найти значение многочлена $f(A)$, если $f(x)=-x^2+4x-6$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -13, \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$$

3. Проверить, будут ли векторы $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(1;-1;3)$, $\vec{c}=(-1;9;-11)$ компланарны.

4. Найти угол между плоскостями $2x+2y-z+4=0$ и $6x-3y+2z+5=0$.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x-1}\right)^{5x}$.

6. Вычислить производную y'_x:

а) $y=e^{2x}\left(x^2-x+\dfrac{1}{2}\right)$; б) $y=\arcsin\sqrt{4-2x}$;

в) $\ln y-\dfrac{y}{x}=7$; г) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t \\ y=\ln(1+t^2). \end{cases}$

7. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{\operatorname{ctg} x}$.

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции и $y=\sqrt{100-x^2}$ на отрезке $[-6;\ 8]$.

Ответы: **1**. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. **2**. (–2; –3; –2). **3**. Да. **4**. $\arccos\dfrac{4}{21}$. **5**. а) 3/2; б) –1/16; в) 1/18; г) e^{-1}. **7**. а) 0; б) e^{-2}. **8**. $f_{\text{наиб}}=f(0)=10$, $f_{\text{наим}}=f(8)=6$.

Вариант 10

1. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases}-4x_1-4x_2+x_3=-8,\\ -2x_1-2x_2+2x_3=-4,\\ 4x_1-3x_2+3x_3=8.\end{cases}$$

3. Вычислить объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(2;0;4)$, $B(0;3;7)$, $C(0;0;6)$, $D(4;3;5)$.

4. Определить угол между прямыми $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{-2}$ и $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{5}$.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2+3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x^2-\pi^2}{\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^x$.

6. Вычислить производную y'_x:

а) $y=2x^3-x\sqrt[4]{x}+\frac{4}{x^2}$;

б) $y=\frac{e^{\cos x}}{\sin x}$;

в) $y=\operatorname{arcctg}\left(e^{x/2}\right)$;

г) $y=x^{2x+1}$.

7. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{1/x}$.

8. Найти точки экстремума функции $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Ответы: **1**. $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$. **2**. (2; 0; 0). **3**. 2. **4**. $\arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{6}}\right)$. **5**. а) 7/2; б) 0; в) -2π; г) ∞. **7**. а) 0; б) e^2. **8**. $x=0$ – точка максимума, $y_{\max}=-2$, $x=2$ – точка минимума, $y_{\min}=2$.

ВАРИАНТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{pmatrix}$. Сумма элементов a_{21} и a_{32} равна:

а) 13; б) 11; в) 8; г) 16; д) 18.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Сумма $A+B$ равна:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; в) не существует; г) (8); д) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Произведение $A\cdot B$ равно:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$; в) не существует; г) (8); д) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Транспонированной к матрице $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ является матрица:

а) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ равен:

а) –9; б) 15; в) 12; г) 9; д) 0.

6. Если A^{-1} является обратной к матрице A, то:

а) $A^{-1}A=0$; б) $A^{-1}A=E$; в) $A^{-1}=\dfrac{E}{A}$; г) $AE=A^{-1}$ д) $A^{-1}+A=0$.

7. Система линейных уравнений называется совместной, если:

а) она имеет единственное решение;
б) она имеет хотя бы одно решение;
в) она не имеет решений;
г) она имеет ненулевое решение;
д) она имеет бесконечно много решений.

8. Даны точки $M(2;0)$ и $N(4;2)$. Вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты:

а) (6; 2); б) (–2; –2); в) (2; 2); г) (2; –2); д) (3; 1).

9. Модуль вектора $\vec{a}(3;4)$ равен

а) 7; б) 25; в) 1; г) 5; д) 3,5.

10. Вектор $\vec{a}(1;2)$ коллинеарен вектору $\vec{b}(-2;\alpha)$, если:

а) $\alpha=-4$; б) $\alpha=0$; в) $\alpha=-2$; г) $\alpha=-1$; д) $\alpha=2$.

11. Если вектор $\vec{a}$ ортогонален вектору $\vec{b}$, то:

а) $\vec{a}\times\vec{b}=0$; б) $\vec{a}+\vec{b}=0$; в) $\vec{a}-\vec{b}=0$; г) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; д) $\vec{a}\times\vec{b}=1$.

12. Среди приведенных ниже уравнений выбрать уравнения плоскости:

а) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$;

б) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$;

в) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$;

г) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$;

д) $y-y_0=k(x-x_0)$.

13. Направляющим вектором прямой $\dfrac{x-13}{5}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z+9}{-2}$ является вектор с координатами

а) (13; 1; –9) б) (–8; 8; 7); в)(–13;–1; 9); г) (5; –1; –2); д) (5; 9; –2).

14. Прямая, проходящая через точки $A(-1;\ 2)$ и $B(3;\ 4)$, имеет уравнение:

а) $-1(x-3)+2(y-4)=0$;

б) $\dfrac{x+1}{3+1}=\dfrac{y-2}{4-2}$;

в) $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y+2}{4+2}$;

г) $3(x+1)+4(y-2)=0$;

д) $\dfrac{y+1}{3+1}=\dfrac{x-2}{4-2}$.

15. Прямая $y=2x+3$ параллельна прямой $y=kx-4$, если:

а) $k=4$; б) $k=0$; в) $k=-2$; г) $k=-1/2$; д) $k=2$.

16. Прямая $y=3x+3$ перпендикулярна прямой $y=kx+2$, если:
а) $k=1$; б) $k=0{,}3$; в) $k=1/3$; г) $k=-1/3$; д) $k=2$.

17. Первый замечательный предел имеет вид:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{x}=0$;

18. Второй замечательный предел имеет вид:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e^{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{x}=e$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}=e$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$;

19. Отметить верные утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}=1$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

20. Бесконечно малые при $x\to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными, если:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)+\beta(x)}{x}=1$; г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$; д) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=a$;

21. Отметить утверждения, верные при $x \to 0$:

а) $\operatorname{tg} x \sim x$;

б) $\sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$;

в) $2^x - 1 \sim \frac{2^x}{\ln 2}$;

г) $1 - \cos 2x \sim \frac{x^2}{2}$;

д) $\ln(1-2x) \sim 2x$.

22. Производная произведения $u \cdot v$ вычисляется по формуле:

а) $(uv)' = u'v + v'u$;

б) $(uv)' = u' + v'$;

в) $(uv)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$;

г) $(uv)' = u'v'$;

д) $(uv)' = u'v' - uv$.

23. Производная частного $\frac{u}{v}$ вычисляется по формуле:

а) $\left(\frac{u}{v}\right)' = u'v - v'u$;

б) $\left(\frac{u}{v}\right)' = u' - v'$;

в) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$;

г) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{(v')^2}$;

д) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v' - uv}{v}$.

24. Если функция $y = f(x)$ не убывает на интервале $(a;b)$, то на этом интервале:

а) $f'(x) = 0$; б) $f''(x) < 0$; в) $f'(x) \geq 0$; г) $f'(x) < 0$; д) $f(x) > 0$.

25. Если при переходе через точку $x = x_0$ производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то $x = x_0$ является:

а) точкой перегиба;
б) точкой минимума;
в) точкой максимума;
г) точкой разрыва;
д) точкой экстремума.

Ответы: 1. а). **2.** в). **3.** г). **4.** д). **5.** г). **6.** б). **7.** б). **8.** в). **9.** г). **10.** а). **11.** г). **12.** а), в), г). **13.** д). **14** б). **15.** д). **16.** г). **17** г). **18.** б), в). **19.** а), в), г). **20.** д). **21.** а), б), в). **22.** а). **23.** в). **24.** в). **25.** б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 356 с.
2. Герасимович, А. И. Математический анализ : справ. пособие : в 2 ч. Ч. 1 / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск : Выш. шк., 1989. – 287 с.
3. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. Ч. 1 / Е. И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1990. – 349 с.
4. Гусак, А. А. Высшая математика : учеб. для студентов вузов: в 2 т. Т. 1 / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 544 с.
5. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2002. – 640 с.
6. Кузнецов, В. А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты) : учеб. пособие для втузов / В. А. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1983. – 175 с.
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2005. – 234 с.
8. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 2004. – 270 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Задорожнюк Мария Викторовна
Цитринов Андрей Викторович
Чеховская Анна Михайловна

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ПРЕДЕЛЫ. ПРОИЗВОДНЫЕ

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Математика»
для студентов всех специальностей
заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *А. В. Власов*
Компьютерная верстка *Е. Б. Ящук*

Подписано в печать 08.01.13.
Формат $60x84/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,89.
Изд. № 31.
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр
Учреждения образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48