Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. Г. МИРИМАНОВ

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ ТОНКИХ НЕЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНЕЧНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 31 III 1949)

1. Большинство задач прикладной электродинамики сводится к определению электромагнитного поля пространства, в котором, помимо заданных источников, расположены некоторые тела сравнительно общего вида. Теоретической основой для общего и строгого решения этих задач может служить полученное ниже интегральное уравнение. В настоящей статье рассматривается случай применения его к решению задач отражения электромагнитных волн от тонких незамкнутых поверхностей конечной кривизны.

2. Предположим, что в бесконечно-протяженную однородную среду помещено однородное тело произвольной формы. Скалярный потенциал $\varphi(r)$ в произвольной точке r пространства, окружающего это тело, будет решением однородного волнового уравнения

$$\nabla^2\varphi(r) + k_a^2\varphi(r) = 0, \tag{1}$$

а скалярный потенциал в точках, лежащих внутри тела, — решением уравнения

$$\nabla^2\varphi(r) + k_b^2\varphi(r) = 0, \tag{2}$$

где

$$k_a^2 = \frac{(\varepsilon_a\omega + 4\pi\sigma_a i)\,\mu_a\omega}{c_a^2}, \quad k_b^2 = \frac{(\varepsilon_b\omega + 4\pi\sigma_b i)\,\mu_b\omega}{c_b^2}. \tag{3}$$

На поверхности тела имеют место граничные условия

$$\varphi(r)\big|_b = \varphi(r)\big|_a, \tag{4}$$

$$\varepsilon_a \frac{\partial\varphi(r)}{\partial n}\bigg|_a = \varepsilon_b \frac{\partial\varphi(r)}{\partial n}\bigg|_b. \tag{5}$$

Из них следует

$$\nabla^2\varphi(r)\big|_b = (\nabla^2 + k_a^2 - k_b^2)\,\varphi(r)\big|_a, \tag{6}$$

где ε_a и ε_b — комплексные диэлектрические проницаемости, соответствующие среде и телу.

Дифференциальные уравнения (1) и (2) и граничные условия (4), (5) и (6) при помощи теоремы Остроградского — Грина могут быть преобразованы в одно неоднородное интегральное уравнение

$$\int_V f(r) E(r, r')\,dr' + \int_S \left\{ \frac{\partial\varphi(r')}{\partial n'} E(r, r') - \varphi(r') \frac{\partial E(r, r')}{\partial n'} \right\} dr' =$$

$$\begin{aligned} &= 4\pi\varphi(r), \text{ если } r \text{ находится внутри } V; \\ &= 0, \qquad \text{ если } r \text{ находится вне } V. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\frac{e^{ik_a|r-r'|}}{|r-r'|} = E(r, r')$; $f(r)$ — некоторая известная функция координат, целиком определяемая заданием первичных источников излучения в области V, а n' — внешняя нормаль к поверхности S. Выражение (7), естественно, будет справедливо также в том случае, если вместо $E(r, r')$ будет взята функция Грина поверхности S.

Применяя выражение (7) к пространству вне тела и полагая при этом $f(r) = 0$, а затем применяя его к пространству внутри тела, полагая $f(r) = (k_b^2 - k_a^2)\varphi(r)$ и суммируя оба выражения с учетом граничных условий (4) — (6), получим:

$$\varphi(r) = \left(\frac{\varphi e^{ik_a|r-r_0|}}{|r-r_0|} \right) + \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}\right) \int_S \frac{\partial\varphi(r')}{\partial n'}\bigg|_b E(r, r')\,dr' +$$

$$+ \frac{(k_b^2 - k_a^2)}{4\pi} \int_V \varphi(r') E(r, r')\,dr'. \tag{8}$$

Здесь $\varphi_0(r) = \left(\frac{\varphi e^{ik_a|r-r_0|}}{|r-r_0|} \right) = \varphi E(r, r_0)$ есть потенциал падающего поля в точке r, создаваемый точечным источником, расположенным в точке r_0. Два другие члена в правой части интегрального уравнения (8) соответствуют потенциалу вторичного поля, образованного зарядами, индуцированными внутри и на поверхности тела.

3. В рассматриваемом нами случае тонких незамкнутых поверхностей конечной кривизны интегральное уравнение для $\varphi(r)$ может быть значительно упрощено. Действительно, полагая, что поверхность имеет всюду одинаковую толщину h, и пренебрегая, благодаря малой величине h, поверхностью тонких концов, будем считать, что поверхность S, по которой берется поверхностный интеграл в уравнении (8), состоит из двух параллельных частей S_{I} и S_{II}.

Тогда можем написать

$$E(r_{\mathrm{I}}, r'_{\mathrm{II}}) \frac{\partial\varphi(r'_{\mathrm{II}})}{\partial n'}\bigg|_b = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial n'^m} \left(E(r, r'_{\mathrm{I}}) \frac{\partial\varphi(r'_{\mathrm{I}})}{\partial n'} \right)\bigg|_b, \tag{9}$$

$$\int_S E(r, r') \frac{\partial\varphi(r')}{\partial n'}\bigg|_b dr' = \int_{S_{\mathrm{I}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h^m}{m!} \frac{\partial m}{\partial n'^m} \left(E(r, r') \frac{\partial\varphi(r)}{\partial n'} \right)\bigg|_b dr', \tag{10}$$

$$\int\limits_V \varphi(r') E(r, r')\, dr' = \int\limits_{S_{\rm I}} dr' \int\limits_0^h dh' \varphi(r + h'n') E(r, r' + h'n') =$$

$$= \int\limits_{S_{\rm I}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^m}{\partial n'^m} \varphi(r') E(r, r') \Big|_b dr'. \qquad (11)$$

Подставляя выражения (10) и (11) в (8), получим

$$\varphi(r) = \varphi_0(r) + \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}\right) \int\limits_{S_{\rm I}} \frac{h^m}{m!} \sum_{j=1}^{m+1} {}_mC_{j-1} \left(\frac{\partial^j \varphi}{\partial n^j}\right) \left(\frac{\partial^{m-j+1} E}{\partial n^{m-j+1}}\right)\Big|_b dr' +$$

$$+ \frac{(k_b^2 - k_a^2)}{4\pi} \int\limits_{S_{\rm I}} \frac{h^m}{m!} \sum_{j=0}^{m-1} {}_{m-1}C_j \left(\frac{\partial^j \varphi}{\partial n^j}\right) \left(\frac{\partial^{m-j-1} E}{\partial n^{m-j-1}}\right)\Big|_b dr', \qquad (12)$$

где ${}_mC_{j-1}$, ${}_{m-1}C_j$ — биномиальные коэффициенты.

Полагая $\varphi(r) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} h^t \varphi_t(r)$, из выражения (12) для $t \geqslant 1$ находим

$$\varphi_t(r) = \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}\right) \int\limits_{S_{\rm I}} \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m!} \sum_{j=1}^{m+1} {}_mC_{j-1} \left(\frac{\partial^j \varphi_{t-m}}{\partial n^j}\right) \left(\frac{\partial^{m-j+1} E}{\partial n^{m-j+1}}\right)\Big|_b dr' +$$

$$+ \frac{(k_b^2 - k_a^2)}{4\pi} \int\limits_{S_{\rm I}} \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m-1} {}_{m-1}C_j \left(\frac{\partial^j \varphi_{t-m}}{\partial n^j}\right) \left(\frac{\partial^{m-j+1} E}{\partial n^{m-j-1}}\right)\Big|_b dr'. \qquad (13)$$

Но из граничных условий (4) — (6) следует

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}\Big|_b - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}\Big|_a = -(k_b^2 - k_a^2)\varphi_a - 2C_{cp}\left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} - 1\right)\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_a, \qquad (14)$$

где C_{cp} — средняя кривизна поверхности S в точке r'.

Применяя равенство (14) к $\varphi_t(r)$, при $t \geqslant 1$ из (13) и (4) — (6) получим:

$$\varphi_1(r) = \int\limits_{S_{\rm I}} \left\{\left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} - 1\right) \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n'} \frac{\partial E}{\partial n'} + \left[\frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n'^2} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} \frac{(k_b^2 - k_a^2)}{4\pi} \varphi_0\right] E + \frac{2C_{cp}}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} - 1\right)\left(\frac{\varepsilon_a}{\alpha_b} - 1\right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial n'} E\right\} dr', \qquad (15)$$

или, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n'} = \varphi_0 \cos\gamma \frac{(ik_a - 1)}{|r' - r_0|} \cong ik_a \cos\gamma, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial n'^2} \cong k_a^2 \varphi_0 \cos\gamma,$$

$$\frac{\partial E}{\partial n'} = E\cos\alpha \frac{(ik_a - 1)}{|r' - r|} \cong ik_a E\cos\alpha, \qquad (16)$$

где γ — угол между $r' - r_0$ и n' и α — угол между $r' - r$ и n', из (15) и (12) находим:

$$\varphi(r) = \varphi_0(r) + h\varphi_1(r) = \varphi_0(r) + h\frac{\varphi}{4\pi}\int\limits_{S_I}\Big\{-k_a^2\cos\alpha\cos\gamma\left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a}-1\right) -$$

$$-k_a^2\cos^2\gamma\left(1-\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}\right)+\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}(k_b^2-k_a^2)+2ik_aC_{cp}\cos\gamma\left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a}-1\right)\left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}-1\right)\Big\}\times$$

$$\times\frac{\exp[ik_a\{|r-r'|+|r'-r_0|\}]}{|r-r'|\cdot|r'-r_0|}\,dr'. \qquad (17)$$

Уравнение (17) является решением рассматриваемого класса задач при сделанных ранее допущениях, а именно тех, что толщина поверхности мала и постоянна, благодаря чему поверхностью концов можно пренебречь и $\frac{|r-r'|}{\lambda_a} \gg 1$, $\frac{|r'-r_0|}{\lambda_a} \gg 1$.

Последние два из этих допущений не обязательны и могут быть отброшены. В этом случае в уравнение (15) должны быть подставлены не приближенные, а точные выражения (16). Таким образом, допущение о том, что рассматриваемые отражающие поверхности имеют ничтожно малую толщину по сравнению с длиной волны и размерами самой поверхности, в данной работе может быть единственным. В отличие от известных нам работ в рассматриваемой области, в настоящей работе не делается никаких предположений относительно идеальной проводимости отражающих поверхностей. Полученное решение не связано также с введением приближенных граничных условий.

Интеграл в выражении (17) может быть раскрыт одним из известных способов. В частности, для некоторых поверхностей, обладающих круговой симметрией, таких как сферический сегмент, параболоид вращения и некоторые другие, может быть получено точное значение его.

4. Найденная выше скалярная функция $\varphi(r)$ может быть применена для определения компонент вектора электрического и магнитного поля. В качестве примера рассмотрим случай, когда отражающая поверхность обладает круговой симметрией, а первичным источником поля служит электрический диполь. В этом случае поле определяется одной компонентой вектора Герца, параллельной оси диполя. Следовательно, при расположении диполя вдоль оси симметрии поверхности z поле определяется z-компонентой вектора Герца, которая может быть написана в виде $\Pi = \mathbf{i}_z\varphi^*(r)$, где $\mathbf{i}_z$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z. Векторы напряженности электрического и магнитного полей будут определяться в этом случае выражениями:

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}_x\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x\,\partial z} + \mathbf{i}_y\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y\,\partial z} + \mathbf{i}_z\left(k^2\varphi^* + \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial z^2}\right), \qquad (18)$$

$$\mathbf{H} = ik\frac{\partial\varphi^*}{\partial z}\mathbf{i}_y + ik\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\mathbf{i}_x. \qquad (19)$$

Выражениями (17) — (18) — (19) электрические и магнитные поля рассматриваемого класса задач полностью определяются.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить акад. Б. А. Введенского за внимание и советы при выполнении этой работы и чл.-корр. АН СССР А. Н. Тихонова за просмотр рукописи и дискуссию полученных результатов.

Институт автоматики и телемеханики
Академии наук СССР

Поступило
28 III 1949