Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М. Б. ЗАКСОН

# О МОДИФИКАЦИИ ОДНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОВОДОВ

*(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 31 III 1949)*

В последнее время широкое применение для расчета возбуждения волноводов и резонаторов получил метод, развитый Я. Н. Фельдом [1]. Во многих практически важных случаях, когда достаточно отыскать возбуждаемые волны вне участков волновода, занятых излучателями, расчет может быть произведен простым способом, во многом аналогичным упомянутому методу Фельда.

В этих областях волновода возбуждаемые волны могут быть представлены в виде суперпозиции всех возможных типов электрических и магнитных волн, и задача сводится к определению коэффициентов разложения по этим волнам, что может быть легко осуществлено путем применения леммы Лоренца.

Мы изложим сущность предлагаемого метода на примере расчета возбуждения бесконечного регулярного волновода произвольного сечения с идеально проводящими стенками. Для простоты будем полагать, что заполняющая волновод среда не имеет потерь. Вводя прямоугольную систему координат с осью $z$, направленной вдоль волновода, будем предполагать, что возбуждающие источники — произвольно ориентированные токи и касательные к стенке волновода составляющие электрического поля, например, поля в отверстиях или щелях, — расположены в пределах участка $|z|<d$.

Возбуждаемые волны, распространяющиеся в сторону положительных и отрицательных $z$, мы будем искать, соответственно, в пределах участков волновода $z>d$ и $z<d$.

Вектор Герца возбужденных электрических волн в области $z>d$ может быть записан в виде:

$$\Pi_e^{+}=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(x, y)\, e^{-i\gamma_n z}, \tag{1}$$

где $\psi_n(x, y)$ — семейство ортогональных нормированных функций, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_n}{\partial y^2}+\eta_n^2\psi_n=0$$

при граничном условии $\psi_n=0$ на стенке волновода;

$$\gamma_n=\sqrt{k^2-\eta_n^2}.$$

Выражение для вектора Герца магнитных волн в области $z > d$ имеет аналогичный вид:

$$\Pi_m^+ = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n(x, y) e^{-i\Gamma_n z}, \tag{2}$$

где $\varphi_n(x, y)$ — семейство ортогональных нормированных функций, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} + \varkappa_n^2 \varphi_n = 0$$

при граничном условии $\partial \varphi_n / \partial \nu = 0$ ($\nu$ — внешняя нормаль) на стенке волновода;

$$\Gamma_n = \sqrt{k^2 - \varkappa_n^2}.$$

Таким же образом записываем векторы Герца электрических и магнитных волн в области $z < d$:

$$\Pi_e^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x, y) e^{i\gamma_n z}, \tag{3}$$

$$\Pi_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x, y) e^{i\Gamma_n z}. \tag{4}$$

Для определения искомых коэффициентов $A_n$, $B_n$, $a_n$ и $b_n$ вводим в волноводе ($-\infty < z < +\infty$) четыре вспомогательных волны:

$$\begin{aligned} \overset{+}{\pi}_e &= \psi_s(x, y) e^{-i\gamma_s z}, & \overset{+}{\pi}_m &= \varphi_s(x, y) e^{-i\Gamma_s z}, \\ \pi_e^- &= \psi_s(x, y) e^{i\gamma_s z}, & \pi_m^- &= \varphi_s(x, y) e^{i\Gamma_s z}. \end{aligned} \tag{5}$$

К одной из вспомогательных волн и к полям, возбужденным заданными источниками в волноводе, применим лемму Лоренца, как это сделано в работе [1].

После несложных преобразований, учитывая, что касательная составляющая электрического поля отлична от нуля лишь на возбуждающем участке $\sigma_0$ (например, на поверхности щели или отверстия), получим

$$\int\limits_{\sigma_1 + \sigma_2} \left\{ [\overline{E}, \overline{h}] - [\overline{e}, \overline{H}] \right\} \overline{d\sigma} = \frac{4\pi}{c} \int\limits_V \overline{j}\overline{e}\, dv - \int\limits_{\sigma_0} [\overline{E}_0, \overline{h}]\, \overline{d\sigma}, \tag{6}$$

где $\overline{E}$, $\overline{H}$ — искомые поля, возбужденные в волноводе; $\overline{e}$, $\overline{h}$ — поля вспомогательной волны $\pi$; $\overline{j}$ — плотность заданных возбуждающих токов, распределенных в объеме $V$; $\overline{E}_0$ — электрическое поле на участке $\sigma_0$; $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — области поперечных сечений волновода, соответственно, при $z < -d$ и $z > d$.

Для определения коэффициента $a_s$ выбираем в качестве вспомогательной волны $\pi_e^+$.

Выражая искомые и вспомогательные поля через соответствующие векторы Герца и подставляя в уравнение (6), получим:

$$- \sum_{n=1}^{\infty} k a_n e^{-i(\gamma_s - \gamma_n)z} (\gamma_n + \gamma_s) \int_{\sigma_1} \left( \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \frac{\partial \psi_s}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \frac{\partial \psi_s}{\partial y} \right) d\sigma +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-i(\gamma_s - \Gamma_n)z} (k^2 + \gamma_s \Gamma_n) \int_{\sigma_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi_s \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi_s \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) \right\} d\sigma +$$

$$+ \int_{\sigma_2} \left\{ [\bar{E}, \bar{h}_e^+] - [\bar{e}_e^+, \bar{H}] \right\} \overline{d\sigma} = \frac{4\pi}{c} \int_V \bar{j} \bar{e}_e^+ dv - \int_{\sigma_0} [\bar{E}_0, \bar{h}_e^+] d\sigma. \qquad (7)$$

Учитывая, что, ввиду граничного условия, $\psi_s = 0$:

$$\int_{\sigma_1} \left( \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \frac{\partial \psi_s}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \frac{\partial \psi_s}{\partial y} \right) d\sigma = \begin{cases} \eta_s^2 & \text{при } n = s, \\ 0 & \text{при } n \neq s \end{cases}$$

и

$$\int_{\sigma_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi_s \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi_s \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) \right\} d\sigma = 0,$$

а также

$$\int_{\sigma_2} \left\{ [\bar{E}, \bar{h}_e^+] - [\bar{e}_e^+, \bar{H}] \right\} \overline{d\sigma} = 0,$$

получаем равенство для определения коэффициента $a_s$:

$$2k a_s \gamma_s \eta_s^2 = \frac{4\pi}{c} \int_V \bar{j} \bar{e}_e^+ dv - \int_{\sigma_0} [\bar{E}_0, \bar{h}_e^+] \overline{d\sigma}. \qquad (8)$$

Применяя аналогичным образом в качестве вспомогательных волн $\overset{+}{\Pi}_m$, $\Pi_e^-$, $\Pi_m^-$, получим соответствующие равенства для коэффициентов $b_s$, $A_s$ и $B_s$.

Выражения для коэффициентов имеют следующий вид:

$$a_s = \frac{\frac{4\pi}{c} \int_V \bar{j} \bar{e}_e^+ dv - \int_{\sigma_0} [\bar{E}_0, \bar{h}_e^+] \overline{d\sigma}}{2k\gamma_s \eta_s^2},$$

$$b_s = - \frac{\frac{4\pi}{c} \int_V \bar{j} \bar{e}_m^+ dv - \int_{\sigma_0} [\bar{E}_0, \bar{h}_m^+] \overline{d\sigma}}{2k\Gamma_s \varkappa_s^2},$$

$$A_s = \frac{\frac{4\pi}{c} \int_V \bar{j} \bar{e}_e^- dv - \int_{\sigma_0} [\bar{E}_0, \bar{h}_e^-] \overline{d\sigma}}{2k\gamma_s \eta_s^2}, \qquad (9)$$

$$B_s = - \frac{\frac{4\pi}{c} \int_V \bar{j} \bar{e}_m^- dv - \int_{\sigma_0} [\bar{E}_0, \bar{h}_m^-] \overline{d\sigma}}{2k\Gamma_s \varkappa_s^2}.$$

Нетрудно показать, что полученные формулы (9) могут быть просто обобщены на случай возбуждения волновода, на конце которого находится отражатель с известным коэффициентом отражения, а также полубесконечного волновода, возбуждаемого через отверстие в его торце. В последнем случае описанный метод дает возможность определить возбуждаемое поле во всем волноводе.

Поступило
29 III 1949

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Н. Фельд, Основы теории щелевых антенн, М., 1948.