

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. М. БРЕЙТМАН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ СЛИТКА
В СВЯЗИ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТЕМПЕРАТУР

(Представлено академиком Н. Т. Гудцовым 9 XI 1948)

1. Лучшим методом исследования процесса затвердевания слитка, повидимому, является определение перемещения изотермы, сопряженной с границей „корки“ слитка, путем исследования температурного поля. К сожалению, подобные исследования для стального слитка чрезвычайно осложняются высокими температурами стали в изложнице ($\sim 1450^\circ$). Этим и объясняется, что наибольшее число точек в слитке, в которых когда-либо были достаточно точно измерены и зафиксированы температуры, не превышает, повидимому, 4 (2).

Настоящая статья посвящена разработке метода приближенного расчета продвижения фронта кристаллизации в цилиндрическом слитке при минимальных сведениях о температурном поле. Например, рост толщины корки может быть вычислен предлагаемым методом при наличии данных о ходе изменения температуры в двух точках: в одной любой точке внутри корки слитка и в одной точке корки, близкой к поверхности слитка (или просто по температуре поверхности слитка). Это может представить особый интерес для весьма больших слитков.

2. Если принять величину u цилиндрической области распространения теплового потока в цилиндрической стенке (например, в „корке“ слитка) за независимую переменную, то уравнение теплопроводности цилиндрической области будет:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 4\pi a \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial u} \right), \quad (I)$$

где a — коэффициент температуропроводности; θ — разностная температура (для удобства вычислений), равная $T(u, t) - T_{\text{нов}}(t)$; $T(u, t)$ — температура внутренней границы некоторой цилиндрической области u ; $T_{\text{нов}}(t)$ — температура наружной поверхности области u слитка. (Предполагается, что вдоль контуров температура не изменяется.)

Если мы примем:

$$\theta(t, u) = \theta_1(u) e^{-4\pi a c t}, \quad (1)$$

(где c — эмпирическая константа), что достаточно оправдано опытом, где $\theta_1(u)$ не зависит уже от времени, то получим уравнение распределения температур в цилиндрической области:

$$-c^2 \theta_1(u) = \frac{d}{du} \left(u \frac{d\theta_1(u)}{du} \right). \quad (I, 1)$$

Тогда, принимая, что ускорение изменения температуры на внутренней границе области u пропорционально скорости падения температуры на той же границе и обратно пропорционально величине этой области u , т. е. что:

$$\frac{d^2\theta_1(u)}{du^2} = -\frac{c_1}{u} \frac{d\theta_1(u)}{du}, \quad (2)$$

мы получим частное уравнение распределения температур в цилиндрической области:

$$\frac{d\theta_1(u)}{du} = -c_2\theta_1(u), \quad (I, 2)$$

где коэффициент $c_2 = \frac{c^2}{1-c_1}$.

К тому же результату можно прийти и другим путем. Из уравнения (I, 1) следует:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{d\theta_1(u)}{du} = \frac{1}{u} \int_0^u \theta_1(u_1) du_1.$$

Замечая, что правая часть последнего уравнения есть средняя температура $\theta_{1cp}(u)$ области u , получим:

$$\frac{d\theta_1(u)}{du} = -c^2\theta_{1cp}(u). \quad (II)$$

Принимая, что $\theta_{1cp}(u)$ линейно зависит от $\theta_1(u)$, т. е.

$$\alpha + \beta\theta_1(u) = \theta_{1cp}(u), \quad (2')$$

при $\alpha \sim 0$ получим уравнение (I, 2), в котором коэффициент $c_2 = c^2\beta$. При $\alpha \neq 0$, получим:

$$-\frac{d\theta_1(u)}{du} = \alpha_1 + \beta_1\theta_1(u). \quad (I, 3)$$

Принимая во внимание уравнение (1), получим

$$-\frac{d\theta(u, t)}{du} = \alpha_2 + \beta_1\theta(u, t), \quad (I, 4)$$

где $\alpha_2 = \alpha_1 e^{-4\pi a c^2 t}$.

Заметим, что из уравнения (I, 1) следует интегральное уравнение температуры $\theta_1(u)$:

$$\theta_1(u) = -c^2 \int_0^u \frac{du_1}{u_1} \int_0^{u_1} \theta_1(u_2) du_2, \quad (III)$$

где $0 \leq u_2 \leq u_1 \leq u$.

3. Разделяя переменные в уравнении (I, 4) при $\alpha = 0$ и интегрируя правую часть по области, заключенной между границами G_l (удаленной от периферии $G_{нов}$ на l) и $G_{нов}$ (наружная поверхность слитка), а левую в пределах от θ_l (разность температур между G_l и $G_{нов}$) до θ_x (разность температур между G_x и $G_{нов}$), получим:

$$-\frac{1}{\beta_1} \ln \frac{\theta_l(t)}{\theta_x(t)} = u(t). \quad (IV)$$

А так как для нашей цилиндрической стенки

$$u(t) = \pi [(R-l)^2 - (R-x)^2], \quad (3)$$

то, следовательно, толщина корки $X(t)$ цилиндрического слитка в момент t будет:

$$X(t) = R - \sqrt{(R-l)^2 + \lambda_1 \ln \frac{\theta_l(t)}{\theta_x(t)}}, \quad (V)$$

где $\lambda_1 = \frac{1}{\beta_1 \pi}$. Из уравнения (I, 4) получим более общее выражение:

$$X(t) = R - \sqrt{(R-l)^2 + \lambda_1 \ln \frac{\theta_l(t) + \frac{\alpha_2}{\beta_1}}{\theta_x(t) + \frac{\alpha_2}{\beta_1}}}. \quad (VI)$$

При $l=0$ отсюда получим для тонких корок:

$$X(t) = R - \sqrt{R^2 - \lambda_1 \ln \left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_2} \theta_x(t)\right)}. \quad (VII)$$

Из уравнения (IV) можно найти при данном $X(t)$ температуру $T_l(t)$ в любой точке l корки, в данный момент t , т. е.

$$T_l(t) = T_{\text{нов}}(t) + [T_{\text{кр}} - T_{\text{нов}}(t)] e^{-\beta_1 u(t)}, \quad (VIII)$$

где $u(t)$ определяется из (3).

4. В работе (3) мы показали, что для цилиндрического слитка можно принять:

$$X(t) = R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k_1}{R} \sqrt{t}}\right). \quad (4)$$

Из уравнений (V), (VI), (VII) и т. п. и уравнения (4) можно найти выражения зависимости температур от времени. Так например, для $T_l(t)$ получим:

$$T_l(t) = T_{\text{нов}}(t) + [T_{\text{кр}} - T_{\text{нов}}(t)] \exp \{ -\beta_1 \pi [(R-l)^2 - (R^2 - 2k_1 \sqrt{t})] \}. \quad (IX)$$

5. В качестве примера рассмотрим приложение уравнения (V) к расчету толщины корок $X(t)$ парафинового и двух стальных слитков (опытные данные относятся к нормальному сечению слитков на середине их высот).

Характеристики опытов:

1) Парафиновый слиток: диаметр 120 мм, вес ~ 4 кг, время полного затвердевания $t_{\text{ТВ}} \sim 270$ мин.

2) Стальной (ОХН-3М) слиток: диаметр 280 мм, вес 500 кг, $t_{\text{ТВ}} \sim 21$ мин.

3) Стальной (ОХН-3М) слиток: диаметр 800 мм, вес 7000 кг, $t_{\text{ТВ}} \sim 180$ мин. *.

На рис. 1 показано сравнение фактических величин $\xi(t)$ и вычисленных по уравнению:

$$\xi(t) = 1 - \sqrt{(1 - \epsilon)^2 + \frac{\lambda_1}{R^2} \ln \frac{\theta_l(\tau)}{\theta_x(\tau)}}, \quad (V, 1)$$

где $\xi = \frac{X}{R}$, $\epsilon = \frac{l}{R}$, $\tau = \frac{t}{t_{\text{ТВ}}}$.

* Опытные данные о стальных слитках любезно предоставлены автору В. М. Тагеевым.

Как видно из рис. 1, почти все вычисленные и фактические величины $\xi(t)$ совпадают с точностью до $\sim 1\%$ (для трех точек эта разность несколько больше, достигая $\sim 5\%$).

Изложенный метод может быть приложен и к расчету других случаев нестационарного режима распространения теплового потока в цилиндрической теплопроводящей области.

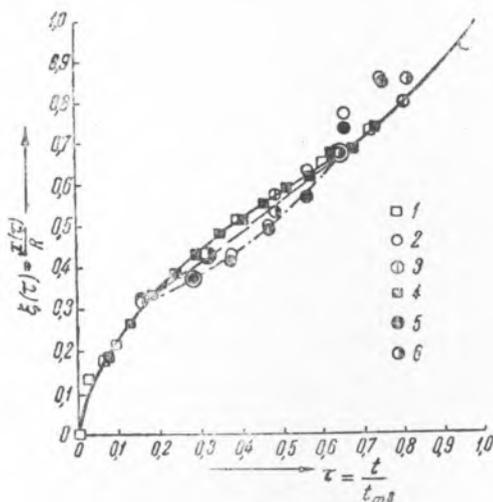


Рис. 1. Сравнение вычисленных по уравнению (V,1) и фактических толщин корок стальных и парафиновых слитков

Материал	Вес слитка в г	R в мм	$t_{\text{та}}$ в мин.	l в мм	λ_1	Обозначения	
						факт.	выч.
Парафин	0,004	60	270	10,5	1125	1	4
Сталь ОХН-ЗМ	0,5	140	21	52	20000	2	5
Сталь ОХН-ЗМ	7,0	400	180	50	70120	3	6

Выражаю благодарность акад. Н. Т. Гудцову за ценные советы и указания, а также Л. И. Морозенскому, О. Д. Зигелю и В. М. Тагееву за полезные дискуссии.

Поступило
9 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. К. Жега'лов и В. М. Тагеев, *Металлург*, в. 2,35 (1938). ² В. М. Тагеев и Б. Б. Гуляев, *Металлург*, в. 8,23 (1939). ³ В. М. Брейтман, *ДАН*, 66, №3 (1949).