

Рис. 3. Корреляция «параметр затухания по времени – параметр пространственной неоднородности возмущения»:
 а – $\Delta T = 200$ К; б – $\Delta T = 250$ К

Таким образом, показано, что интенсивность теплоотвода и границы устойчивого роста нелинейным образом зависят от переохлаждения расплава и от кривизны вершины дендрита.

Работа выполнена в рамках НИР «Динамика неравновесных тепловых структур и проблемы деформирования твердых тел в современных технико-технологических системах». Научный руководитель темы профессор О. Н. Шабловский.

Литература

1. Herlach, D. M. Metastable Solids from Undercooled Melts / D. M. Herlach, P. Galenko, D. Holland-Moritz. – Oxford : Pergamon, 2007.
2. Шабловский, О. Н. Кинетика роста вершины дендрита в глубоко переохлажденном расплаве. Часть 1. Уравнение фазовой границы кристаллизации / О. Н. Шабловский // Успехи приклад. физики. – 2013. – Т. 1, № 6. – С. 680–685.
3. Шабловский, О. Н. Кинетика роста вершины дендрита в глубоко переохлажденном расплаве. Часть II. Аналитическая структура возмущений линии роста / О. Н. Шабловский // Успехи приклад. физики. – 2014. – Т. 2, № 1. – С. 12–17.
4. Шабловский, О. Н. Динамика неустойчивости волновых возмущений и боковое ветвление дендрита в переохлажденном расплаве / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Успехи приклад. физики. – 2022. – Т. 10, № 2. – С. 189–202.

РАСЧЕТ ОДНОПЕТЛЕВОЙ ДИАГРАММЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА ФОТОННОГО ПРОПАГАТОРА

А. Д. Тамков

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Научный руководитель В. Ю. Гавриш

Изложена методика расчета однопетлевой диаграммы поляризации фотона с использованием размерной регуляризации и параметризации Фейнмана. Проведены предварительные расчеты петлевых интегралов с последующей постановкой задачи о разложении гамма-функции Эйлера в ряд с использованием постоянной Эйлера–Маскерони.

Ключевые слова: фотон, петля, размерная регуляризация, поляризация вакуума.

К настоящему времени квантовая электродинамика (далее – КЭД) успешно описывает все известные процессы электрон-фотонного взаимодействия [1]. Помимо расчетов дифференциальных сечений электропозитронной аннигиляции, эффекта Комптона и рассеяния Меллера известной задачей КЭД является расчет петлевых поправок для высших порядков теории возмущений [2, 3]. К одной из таких задач можно отнести задачу о расчете однопетлевой поляризации вакуума, которая имеет важное значения при переопределении постоянной тонкой структуры α .

В работе кратко излагается методика расчета петлевого интеграла поляризации вакуума с последующим анализом полученных результатов для размерности «пространства–времени» $d = 4$. Показано, что возникающие расходимости могут быть трактованы как полюса гамма-функции Эйлера $\Gamma(z)$.

Постановка задачи. Однопетлевая поправка к фотонному пропагатору КЭД рассчитывается из выражения

$$G_{\mu\nu}(k) = G_{\mu\nu}^0 + i\Pi_{\mu\nu}(k) G_{\nu\nu}^0, \quad (1)$$

где оператор $\Pi_{\mu\nu}(k)$ определяется диаграммой [1].

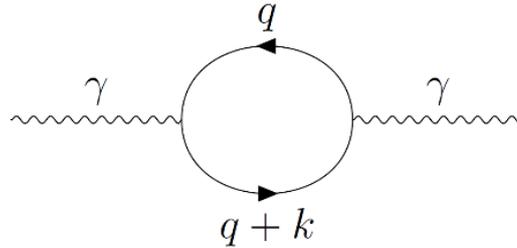


Рис. 1. Петля поляризации вакуума для фотонного пропагатора

Соответствующее рис. 1 выражение для $\Pi_{\mu\nu}(k)$ примет вид [3]:

$$i\Pi_{\mu\nu}(k) = (ie)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma_\mu \frac{i}{q - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{i}{q + k - m + i\varepsilon} \right); \quad (2)$$

в выражении (2) использовано обозначение свертки 4-го импульса с γ -матрицами Дирака $A = A_\mu \gamma^\mu$. После некоторых упрощений из выражения (2) нетрудно получить:

$$i\Pi_{\mu\nu}(k) = -e^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\frac{\gamma_\mu (q + m) \gamma_\nu (k + q + m)}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((q + k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \right), \quad (3)$$

где было учтено, что $q^2 = q^2$ и $k^2 = k^2$. Расчет следа в выражении (3) проведем отдельно:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_\mu (q + m) \gamma_\nu (k + q + m)) &= \text{Tr}(\gamma_\mu q \gamma_\nu k + \gamma_\mu q \gamma_\nu q + \gamma_\mu \gamma_\nu m^2) = \\ &= 4(2q_\mu q_\nu + k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu - g_{\mu\nu}((k \cdot q) + q^2 - m^2)) = 4N_{\mu\nu}(q, k). \end{aligned} \quad (4)$$

С использованием (4) изучаемый интеграл примет вид

$$i\Pi_{\mu\nu}(k) = -4e^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{N_{\mu\nu}(q, k)}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((q+k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \quad (5)$$

вычисление которого проведем методом размерной регуляризации.

Размерная регуляризация петлевых интегралов. Использование общей методики размерной регуляризации приводит выражение (5) к виду

$$i\Pi_{\mu\nu}(k) = -4e^2 \mu^e \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(q, k)}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((q+k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \quad (6)$$

где $d = 4 - e$, а параметр μ введен для сохранения размерности. В (6) удобно объединить знаменатель в один с использованием соотношения

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(ax + b(1-x))^2} \quad (7)$$

и сделать замену переменной $q \rightarrow q - kx$. После указанных операций интеграл (6) упрощается до

$$i\Pi_{\mu\nu}(k) = -4e^2 \mu^e \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(q - kx, k)}{(q^2 - C + i\varepsilon)^2}, \quad (8)$$

где $C = m^2 - k^2 x(1-x)$. Выражение (8) далее проинтегрируем с использованием следующих выражений [3]:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^\mu}{(q^2 - C + i\varepsilon)^2} = 0, \quad \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - C + i\varepsilon)^2} = \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2}{(q^2 - C + i\varepsilon)^2}, \quad (9)$$

а также общего соотношения

$$I_{r,m} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^r}{(q^2 - C + i\varepsilon)^m}, \quad (10)$$

вычисление которого проведем с использованием поворота Вика $q^0 = iq_E^0$ [3]. После некоторых расчетов ответ для интеграла (10) примет вид

$$I_{r,m} = iC^{r-m+\frac{d}{2}} \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(r + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(m - r - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma(m)}. \quad (11)$$

Отметим, что в исследуемом случае $d = 4 - e$ выражение (11) упрощится до

$$I_{r,m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C} \right)^{\frac{e}{2}} C^{2+r-m} \frac{\Gamma\left(2+r-\frac{e}{2}\right) \Gamma\left(m-r-2+\frac{e}{2}\right)}{\Gamma\left(2-\frac{e}{2}\right) \Gamma(m)}. \quad (12)$$

Анализ (12) показывает, что расходимости обусловлены полюсами гамма-функции Эйлера в случае $m-r-2+\frac{e}{2} = \{0, -1, -2, \dots\}$.

Расчет и обсуждение результатов. Замена $q \rightarrow q-kx$ после некоторых вычислений приводит к выражению [3]:

$$N_{\mu\nu}(q-kx, k) = 2q_\mu q_\nu + 2x^2 k_\mu k_\nu - 2xk_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} (q^2 + x^2 k^2 - xk^2 - m^2), \quad (13)$$

подстановка которого в (8) с учетом (9), (12) приводит к

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu}(k) &= -4e^2 \mu^e \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(q-kx, k)}{(q^2 - C + i\varepsilon)^2} = \\ &= -4e^2 \int_0^1 dx \left(\left(\frac{2}{d} - 1 \right) g_{\mu\nu} \mu^e I_{1,2} + (-2x(1-x)k_\mu k_\nu + x(1-x)k^2 g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} m^2) \mu^e I_{0,2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Дальнейшие выкладки связаны с расчетом интегралов $I_{0,2}$ и $I_{1,2}$ в выражениях:

$$\mu^e I_{0,2} = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{C} \right)^{\frac{e}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{e}{2}\right)}{\Gamma(2)} \quad (15)$$

и

$$\mu^e I_{1,2} = -\frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{C} \right)^{\frac{e}{2}} C \frac{\Gamma\left(3-\frac{e}{2}\right) \Gamma\left(-1+\frac{e}{2}\right)}{\Gamma\left(2-\frac{e}{2}\right) \Gamma(2)}, \quad (16)$$

при $e \rightarrow 0$ гамма-функция разлагается в ряды с использованием постоянной Эйлера-Маскерони γ_{Euler} :

$$\Gamma\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{2}{e} - \gamma_{Euler} + \frac{1}{24} (6\gamma^2 + \pi^2) e + O(e); \quad (17)$$

$$\Gamma\left(-1+\frac{e}{2}\right) = -\frac{2}{e} + (\gamma_{Euler} - 1) + \frac{1}{24} (-12 + 12\gamma_{Euler} - 6(\gamma_{Euler})^2 - \pi^2) e + O(e). \quad (18)$$

Подстановка (17), (18) в (14) с учетом $\frac{2}{d} - 1 = \frac{2}{4-e} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}e + O(e)$ приводит к достаточно громоздким выкладкам, поэтому в работе дальнейший расчет проводится не будет.

Таким образом, в работе продемонстрирована процедура расчета петлевых интегралов методом размерной регуляризации с использованием методики параметризации Фейнмана – объединения пропагаторов в один знаменатель. Полученные в работе соотношения могут быть использованы для расчета поправок к вершинным функциям, а также вычисления других одночастично неприводимых диаграмм.

Литература

1. Пенскин, М. Введение в квантовую теорию поля / М. Пенскин, Д. Шредер. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 784 с.
2. Казаков, Д. И. Радиационные поправки, расходимости, регуляризация / Д. И. Казаков. — Дубна : ОИЯИ. – 2008. – 93 с.
3. Romao, J. C. Modern techniques for one-loop calculation / J. C. Romao. – Portugal : Departamento de Fisica, Instituto Superior Tecnico, 2004. – 81 p.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КАЧЕСТВЕННЫХ И КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РАЗРАБОТКЕ МАРШРУТА ВОЛОЧЕНИЯ СТАЛЬНОЙ ПРОВОЛОКИ

А. Р. Рахматулаев

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Научный руководитель С. И. Прач

Волочение проволоки является широко распространенным процессом обработки металлов давлением, при котором происходит постепенное уменьшение поперечного сечения исходной заготовки путем ее многократного протягивания через специальный инструмент – волоку. Однако одна из основных проблем при волочении тонкой проволоки – снижение ее прочности и пластичности, что приводит к обрывам. Это обусловлено высокой температурой на поверхности проволоки в результате деформационного старения, которое снижает качество проволоки [1, 2]. Предлагаемая методика оценки качества проволоки позволяет оптимизировать действующие и разрабатывать новые маршруты волочения с целью повышения качества проволоки, а также производительности волочения без потери качества.

Ключевые слова: маршрут волочения, волока, оптимизация, проволока, качество проволоки, пластичность, производительность.

Методика оценки качества проволоки основана на связи между качеством готовой высокоуглеродистой проволоки и ее состоянием в процессе волочения [3].

С помощью этой методики можно оптимизировать существующие маршруты волочения и разрабатывать новые с целью повышения качества проволоки и увеличения производительности без потери качества. Она учитывает механические свойства и содержание углерода в проволочной заготовке, особенности волочительных станков и определяет критические режимы, которые могут повлиять на качество проволоки.

Методика основана на расчете новых маршрутов волочения или алгоритмов расчета режимов «тонкого» волочения, которые позволяют улучшить технологичность и сохранить нормальные режимы волочения при изготовлении металлокорда из проволоки.