

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Б. ШТЕЙНШЛЕЙГЕР

**ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ РЕЗОНАТОРАХ
ВБЛИЗИ ТОЧЕК СОВПАДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ**

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 18 II 1949)

§ 1. Введение. Круглые цилиндрические электромагнитные резонаторы, использующие волну H_0 , получили широкое применение в технике (особенно измерительной) сверхвысоких частот (¹). Это связано с преимуществами волны типа H_0 перед другими типами волн: а) резонатор H_{01} волны имеет большую добротность; б) волна H_0 не имеет аксиальных токов. Это дает возможность ухудшить добротность нежелательных резонансов остальных типов волн и сильно ослабить их, не влияя при этом на добротность резонанса H_0 волны.

Однако при таких положениях поршня, настраивающего резонатор, когда собственная частота используемой волны H_0 и собственная частота подавляемого типа волны совпадают (эти положения я далее называю „точками совпадения“), наблюдается серьезное снижение добротности резонатора, несмотря на то, что вдали от этих положений резонанс подавляемого типа практически незаметен.

До настоящего времени не было ясности в причинах этого, крайне нежелательного и вредного при практических применениях, явления. В данной работе излагаются основные результаты, полученные автором при рассмотрении указанного вопроса.

По внешним характеристикам резонатор может быть, согласно Щелкунову (²), представлен эквивалентной схемой, по которой входная (и выходная) линия связана с бесконечным множеством колебательных контуров с собственными частотами, соответствующими определенным типам собственных колебаний (типам волн) резонатора.

Можно показать, что схема Щелкунова не передает явлений, происходящих в резонаторе вблизи точек совпадения. Автором показано, что в эту схему надо ввести связь между отдельными контурами, особенно существенную для контуров, имеющих близкие частоты. Указанная связь имеет своей причиной неоднородность резонатора. Последняя обусловлена, главным образом, элементом связи резонатора с входной и выходной линиями. Поскольку на сверхвысоких частотах связь с резонатором осуществляется обычно через отверстие, автором рассмотрено возбуждение через отверстие при близости собственных частот; уточнена эквивалентная схема резонатора, количественно рассмотрено явление падения добротности и показано, что при определенных условиях возможно полное пропадание резонанса при сравнительно высокой добротности.

§ 2. Получение исходных уравнений. Рассматривая, наряду с реальным резонатором, также и соответствующий идеальный (т. е. без потерь и с отверстием, затянутым металлической пленкой), введем две системы векторных функций \mathbf{E}_m и \mathbf{H}_m , удовлетворяющих условиям:

$$k_m \mathbf{H}_m = \text{rot } \mathbf{E}_m; \quad k_m \mathbf{E}_m = \text{rot } \mathbf{H}_m$$

и граничному условию $[\mathbf{nE}_m] = 0$. При $k_m = \omega_m/c$, где ω_m — одна из собственных частот резонатора, легко показать, что системы \mathbf{E}_m , \mathbf{H}_m тождественны системам собственных векторных функций идеального резонатора; они образуют ортогональные системы, которые могут быть одновременно нормированы к объему V .

Разложим поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в реальном резонаторе по системам \mathbf{E}_m , \mathbf{H}_m :

$$\mathbf{E} = \sum_m e_m \mathbf{E}_m; \quad \mathbf{H} = \sum_m h_m \mathbf{H}_m. \quad (1)$$

Эти разложения приближенные, так как в реальном резонаторе имеется небольшая тангенциальная составляющая электрического поля \mathbf{E} на поверхности, учитываемая в дальнейшем.

На основании изложенного, пользуясь уравнениями Максвелла и так называемым векторным аналогом тождества Грина (3), можно получить:

$$k_m^2 h_m + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 h_m}{dt^2} = - \frac{\varepsilon_0}{V} \frac{d}{dt} \int_{S_0 + S_p} [\mathbf{nE}] \mathbf{H}_m ds^*, \quad (2)$$

где S_0 обозначает поверхность отверстия, а S_p — остальную поверхность резонатора. При вычислении интеграла по S_p воспользуемся граничным условием М. А. Леонтовича (4) (связывающим между собой тангенциальные составляющие \mathbf{E} и \mathbf{H} на поверхности), считая при этом поверхность резонатора хорошо проводящей. Тогда при подстановке разложения (1) появятся интегралы типа $\int_{S_p} q \mathbf{H}_m \mathbf{H}_n ds$, где q —

эффективная глубина проникновения тока. Считая при вычислении этого интеграла S_p полной поверхностью резонатора, можно показать, что для рассматриваемого круглого резонатора при $m \neq n$ эти интегралы обращаются в нуль, если q по поверхности резонатора постоянно (для всех типов волн, которые могут иметь „точки совпадения“). Интеграл, соответствующий $m = n$, дает член, эквивалентный затуханию и сдвигу частоты за счет скин-эффекта.

Используя выражение для тангенциальной составляющей поля в отверстии, даваемое теорией дифракции через малые отверстия (5-7), можно для интеграла по S_0 получить (фиксируя $m = \alpha$)

$$\int_{S_0} [\mathbf{nE}] \mathbf{H}_\alpha ds = - \frac{4}{3} \mu_0 R^3 \mathbf{H}_{\alpha 0} \frac{d\mathbf{H}_{\text{ск}}}{dt} - \frac{2}{3} R^3 \mathbf{E}_{\alpha 0} \mathbf{E}_{\text{ск}} k_\alpha. \quad (3)$$

Здесь R — радиус отверстия и все величины \mathbf{E} , \mathbf{H} взяты в центре отверстия**, а $\mathbf{H}_{\text{ск}}$ и $\mathbf{E}_{\text{ск}}$ суть скачки поля на отверстии, если его считать затянутым металлической пленкой, т. е.

$$\mathbf{H}_{\text{ск}} = \mathbf{H}_{\text{внеш. 0}} - \sum_m h_m \mathbf{H}_{m 0}, \quad (4)$$

где $\mathbf{H}_{\text{внеш. 0}}$ есть невозмущенное отверстием значение возбуждающего поля (и аналогично для $\mathbf{E}_{\text{ск}}$).

Предполагая гармонические колебания с частотой возбуждающей волны ω , выделим в сумме (4) (и аналогичной для $\mathbf{E}_{\text{ск}}$) члены, соответствующие типам волн α и β с собственными частотами, близкими частоте возбуждения. Остальными („нерезонансными“) членами можно,

* Здесь и в дальнейшем применяется система MKS.

** Что обозначено индексом 0.

в первом приближении, пренебречь. Тогда уравнение (2) для комплексных амплитуд h_α, h_β дает:

$$h_\alpha z_\alpha + h_\beta z_{\alpha\beta} = U_\alpha, \quad (5)$$

$$h_\alpha z_{\alpha\beta} + h_\beta z_\beta = U_\beta, \quad (5')$$

где

$$z_\alpha = d_\alpha + i \frac{2(\omega - \omega_\alpha')}{\omega}, \quad (6)$$

$$z_{\alpha\beta} = i\gamma_{\alpha\beta} = i \frac{2}{3} \frac{R^3}{V} \{2H_{\alpha 0} H_{\beta 0} - E_{\alpha 0} E_{\beta 0}\}, \quad (7)$$

$$\frac{\omega_\alpha' - \omega_\alpha}{\omega_\alpha} = -\gamma_\alpha = -\frac{1}{3} \frac{R^3}{V} \{2H_{\alpha 0}^2 - E_{\alpha 0}^2\}, \quad (8)$$

$$U_\alpha \cong \frac{2}{3} \frac{R^3}{V} \left\{ 2iH_{\text{внеш. } 0} \cdot H_{\alpha 0} + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{\text{внеш. } 0} \cdot E_{\alpha 0} \right\}, \quad (9)$$

и аналогично для $z_\beta, \gamma_\beta, U_\beta$ (здесь d_α — декремент затухания для типа α). Уравнения (5), (5') идентичны уравнениям для двух связанных через сопротивление связи $z_{\alpha\beta}$ колебательных контуров, с сопротивлениями z_α, z_β , эдс U_α, U_β и токами h_α, h_β . Величины $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$ суть относительные поправки на частоту из-за наличия отверстия.

В идеальном круглом цилиндрическом резонаторе собственные векторные функции $\mathbf{H}_m, \mathbf{E}_m$ в известном смысле неопределенны, так как не определена ориентация узловых диаметров (плоскостей). Однако, аналогично тому, как это имеет место в теории круглой мембраны⁽⁸⁾, введение малой неоднородности границ резонатора (например, в виде отверстия или системы отверстий) ориентирует не определенные до этого векторные функции.

Ориентация узловых диаметров (плоскостей) может быть найдена по правилу Релея⁽⁸⁾ об экстремальных значениях частот, пользуясь полученной выше формулой (8). При этом для каждого типа волны (кроме H_0^{**} и E_0) возможны два различно ориентированных собственных колебания, на которые расщепится "вырожденное" собственное колебание. Поэтому в области совпадения собственных частот двух типов волн α и β с ненулевыми первыми индексами (т. е. не принадлежащими к семействам H_0 и E_0) явления описываются эквивалентной схемой с четырьмя связанными контурами (рис. 1).

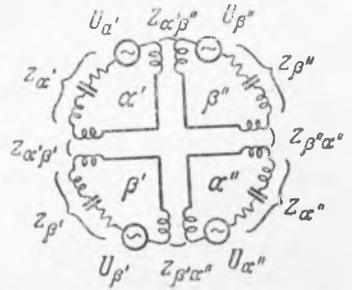


Рис. 1

Если тип α есть H_0 и в резонаторе имеется лишь одна неоднородность в виде отверстия, то в случае магнитного возбуждения эта схема сведется к двум контурам, описываемым уравнениями (5), (5'). Этот случай и рассматривается далее.

§ 3. Явления вблизи точек совпадения. Будем интересоваться частотными зависимостями амплитуд h_α, h_β , рассматривая взаимную расстройку $l = \frac{\omega_{\beta'} - \omega_{\alpha'}}{\omega_{\text{средн.}}}$ как параметр. Считая, что

* $z_{\alpha\beta}$ реактивно благодаря сделанному допущению о постоянстве по всей поверхности глубины проникновения тока.

** Волна H_0 всегда сопровождается спутником типа E . Эти волны легко разделяются, и этого вырождения мы учитывать не будем.

$\gamma_{\alpha\beta} > d_\beta > d_\alpha$, т. е. рассматривая случай сильной связи, можно выражения для h_α и h_β из (5), (5') представить с достаточной точностью в виде суммы двух резонансных членов:

$$h_{\alpha}^{(\beta)} = \frac{\frac{1}{2} U_{\alpha}^{(+)} \left(1 - \frac{l}{2\Omega} \right) - U_{\beta}^{(\alpha)} \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{4\Omega}}{\delta_+ + 2i \frac{\omega_+ - \omega_{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}}} + \frac{\frac{1}{2} U_{\alpha}^{(-)} \left(1 + \frac{l}{2\Omega} \right) + U_{\beta}^{(\alpha)} \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{4\Omega}}{\delta_- + 2i \frac{\omega_- - \omega_{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}}}. \quad (10)$$

Резонансные частоты ω_+ , ω_- и декременты затухания δ_+ , δ_- этих резонансных членов выражаются следующим образом:

$$\frac{\omega_{\pm} - \omega_{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{l}{2} \frac{\pm}{(-)}, \quad (11)$$

$$\delta_{\pm} = \frac{d_\alpha \left(1 - \frac{l}{2\Omega} \right) + d_\beta \left(1 + \frac{l}{2\Omega} \right)}{2}, \quad (12)$$

где $\Omega = \frac{\sqrt{\gamma_{\alpha\beta}^2 + l^2}}{2}$.

Графическим изображением формулы (11) для частот ω_+ и ω_- является известный график Вина. Уравнения (11), (12) поясняют два явления, происходящие вблизи точек совпадения: 1) сдвиг резонансной частоты на величину порядка $\gamma_{\alpha\beta}$; 2) увеличение декремента используемого резонанса с величины d_α до величины $\frac{d_\alpha + d_\beta}{2}$ *. При сильной связи $\gamma_{\alpha\beta}$ между типами увеличение декремента подавляемой волны увеличивает декремент используемой.

Из (10) видно, что при некоторой расстройке l один из резонансных членов обращается в нуль.

Вблизи точки совпадения резонансов может наблюдаться пропадающие резонанса, даже при малом его декремента.

При слабой связи ($\gamma_{\alpha\beta}^2 < d_\beta d_\alpha$) наличие последней скажется главным образом в увеличении декремента используемого резонанса до величины:

$$d' = d_\alpha \left(1 + \frac{\gamma_{\alpha\beta}^2}{d_\alpha d_\beta} \right).$$

Только при слабой связи $\gamma_{\alpha\beta}$ между волнами увеличение декремента подавляемого колебания приводит к ослаблению его влияния на резонанс колебания типа H_0 .

Поступило
31 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. А. Доброхотов, Радиотехнические измерения на сантиметровых волнах, 1948. ² S. A. Schelkunoff, P. I. R. E., 32, 2 (1944). ³ Д. Страттон, Теория электромагнетизма, 1948, стр. 225. ⁴ М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, сер. физ., 8, 1 (1944). ⁵ В. Б. Бродский, Изв. АН СССР, сер. физ., 10, 17 (1946). ⁶ Я. Н. Фельд, Основы теории щелевых антенн, 1948. ⁷ В. В. Владимировский, ЖТФ, 17, 11 (1947). ⁸ Релей, Теория звука, 1940, 1, § 198, § 209.

* Декремент d_β подавляемой волны намного больше декремента d_α используемой.