Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ

ОБОБЩЕННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ТЕОРИИ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 III 1949)

Классические теории деформации одно- и двуразмерных тел (стержней, плит и оболочек) строятся по следующей схеме.

Все напряжения и им соответствующие деформации разделяются на основные и второстепенные. При этом под второстепенными напряжениями и деформациями понимают те, которыми можно пренебречь при вычислении потенциальной энергии рассматриваемой упругой системы. Указанное разделение, обосновываемое теми или иными соображениями, является первой гипотезой, лежащей в основе теории.

Предположения о характере перемещений или деформаций, формулируемые обычно в виде „кинематической гипотезы", составляют второе основное положение теории.

Наконец, третья гипотеза, сводящаяся к утверждению о связи основных напряжений только с основными деформациями, позволяет получить, после использования закона Гука и принципа стационарности полной потенциальной энергии, систему уравнений, определяющую неизвестные функции, входящие в принятые выражения перемещений или деформаций.

Второстепенные напряжения могут быть вычислены из уравнений равновесия. Естественно, что они находятся в противоречии с принятой картиной деформаций или перемещений. Это противоречие неизбежно в прикладных теориях и не должно рассматриваться как их недостаток.

Воспользуемся намеченной схемой построения прикладных теорий для уточнения основных соотношений теории тонких стержней Кирхгофа и выяснения их связи с формулами теорий тонкостенных стержней.

В основу теории положим следующие гипотезы:

1. Напряжения σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} и деформации ε_z, γ_{xz}, γ_{yz} являются основными (ось z направлена по касательной к оси стержня, оси x и y — главные оси инерции поперечного сечения *).

2. Распределение деформаций ε_z, γ_{xz}, γ_{yz} дается формулами, отвечающими при $\tau = \text{const}$ решению задачи Сен-Венана для элемента стержня

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0, \\ &\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)\tau, \qquad \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)\tau, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon + \varkappa_1 y - \varkappa_2 x + \varphi(x, y)\,\dot{\tau}. \tag{2}$$

* Для простоты рассматривается случай прямолинейного и нескрученного призматического стержня; распространение формул на более общую задачу легко выполняется по аналогии с обычной теорией Кирхгофа.

Здесь: $\varphi(x, y)$ — функция кручения, удовлетворяющая уравнению $\Delta\varphi = 0$ и граничному условию $d\varphi / dn = y\cos(n, x) - x\cos(n, y)$; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — кривизны деформированной оси стержня; τ — угол закручивания на единицу длины; $\dot{\tau} = d\tau / dz$; ε — относительное удлинение оси стержня.

В задаче Сен-Венана о растяжении, изгибе парами и кручении стержня кривизны $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, кручение τ и относительное удлинение ε постоянны, но при принятии соотношений (1) и (2) в качестве исходной гипотезы теории деформации тонкого стержня эти величины необходимо считать зависящими от z, ибо решение Сен-Венана справедливо, как это впервые отметил Клебш, в сечении $z = \text{const}$, а не для всего стержня.

Соотношения (1), (2) отличаются от классических формул наличием дополнительного члена $\varphi(x, y)\dot{\tau}$ в выражении ε_z. Необходимость введения этого члена может быть обоснована двумя путями. Во-первых, из условий сплошности Сен-Венана следует, что при переменном τ член $\varphi(x, y)\dot{\tau}$ необходим для того, чтобы деформации (1) и (2) удовлетворяли условиям сплошности. Это легко установить, если принять соотношения (1) и найти вид ε_z интегрированием уравнений сплошности. Во-вторых, как было показано В. В. Новожиловым (1), соотношения (1) и (2) получаются при разложении перемещений u, v, w в ряды по координатам x и y точек поперечного сечения и отвечают второму приближению. При выводе этих формул В. В. Новожиловым было принято лишь предположение о малости деформаций по сравнению с углами поворота и единицей. Для отождествления функции $\varphi(x, y)$, входящей в указанные разложения, с функцией кручения приходится использовать необходимость совпадения при $\tau = \text{const}$ формул (1) и (2) с решением задачи Сен-Венана.

Заметим, что задача о стесненном кручении призматических стержней была приближенно решена Н. В. Зволинским (2), исходившим из задания перемещений в форме $u = -yf(z)$, $v = xf(z)$, $w = \varphi(x, y)F(z)$, более общей, нежели отвечающая (1) и (2), и определившим вариационным путем функции $F(z)$ и $f(z)$.

Связывая с помощью закона Гука основные напряжения и основные деформации, имеем

$$\sigma_z = E(\varepsilon + \varkappa_1 y - \varkappa_2 x + \varphi\dot{\tau}), \qquad (3)$$
$$\tau_{xz} = \mu\gamma_{xz}, \qquad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz},$$

где E — модуль Юнга, а μ — модуль сдвига.

Подстановка (3) в выражение потенциальной энергии стержня, в котором сохранены только основные напряжения

$$\Pi = \iint\limits_{(\Omega)} \int\limits_0^L \left\{\frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{1}{2\mu}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\right\} dx\,dy\,dz,$$

дает в случае стержня, имеющего две оси симметрии, формулу

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_0^L \{E\Omega\varepsilon^2 + EI_x\varkappa_1^2 + EI_y\varkappa_2^2 + C\tau^2 + EI_\varphi\dot{\tau}^2\}\,dz,$$

где Ω — площадь поперечного сечения; I_x, I_y — моменты инерции поперечного сечения относительно осей x и y; $I_\varphi = \iint\limits_{(\Omega)} \varphi^2(x, y)\,dx\,dy$; C — жесткость при свободном кручении.

Составляя вариацию потенциальной энергии

$$\delta\Pi = \int_0^L \{E\Omega\varepsilon\,\delta\varepsilon + EI_x\varkappa_1\delta\varkappa_1 + EI_y\varkappa_2\delta\varkappa_2 + C\tau\,\delta\tau + EI_\varphi\dot{\tau}\,\delta\dot{\tau}\}\,dz$$

и преобразуя последний член интегрированием по частям, имеем

$$\delta\Pi = \int_0^L \{E\Omega\varepsilon\,\delta\varepsilon + EI_x\varkappa_1\delta\varkappa_1 + EI_y\varkappa_2\delta\varkappa_2 + [C\tau - EI_\varphi\ddot{\tau}]\,\delta\tau\}\,dz + EI_\varphi\dot{\tau}\,\delta\tau\Big|_0^L. \quad (4)$$

Коэффициенты при вариациях $\delta\varepsilon$, $\delta\varkappa_1$, $\delta\varkappa_2$, $\delta\tau$ должны представлять собой соответствующие обобщенные силы — растягивающее усилие V_z и моменты M_x, M_y, M_z; поэтому

$$V_z = E\Omega\varepsilon, \quad M_x = EI_x\varkappa_1, \quad M_y = EI_y\varkappa_2, \tag{5}$$

$$M_z = C\tau - EI_\varphi\ddot{\tau}. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) отличаются от соотношений Кирхгофа наличием дополнительного члена в выражении для M_z.

Обобщенное соотношение Кирхгофа (6) может быть использовано при исследовании любых задач теории тонких стержней, в том числе и задач устойчивости.

В случае стержней, имеющих удлиненное поперечное сечение, формула (6) при приближенном вычислении функции кручения переходит в основные соотношения теорий тонкостенных стержней В. З. Власова и А. А. Уманского. Действительно, вводя функцию $\Phi(x, y)$ с помощью соотношений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - x, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - y,$$

имеем

$$d\varphi = -\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,ds - \left[x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right]ds. \tag{7}$$

Интегрируя (7) вдоль линии $x = x(s)$, $y = y(s)$, получаем

$$\varphi(s) = -\int_0^s (x\,dy - y\,dx) - \int_0^s \frac{\partial\Phi}{\partial n}\,ds + \varphi_0. \tag{8}$$

Выбирая в качестве пути интегрирования срединную линию профиля и используя приближенные соотношения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \qquad \text{(открытый профиль)},$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\Omega^*}{h\oint\frac{ds}{n}} \qquad \text{(закрытый профиль)},$$

справедливые в случае удлиненных профилей (тонкостенные стержни), перепишем (8) в виде

$$\varphi(s) = -\int_0^s (x\,dy - y\,dx) + \varphi_0 = -\omega(s) + \varphi_0 \qquad \text{(открытый профиль)},$$

$$\varphi(s) = -\int_0^s (x\,dy - y\,dx) + \Omega^*\int_0^s \frac{ds}{h\oint\frac{ds}{n}} + \varphi_0 = -\omega(s) + \Omega^*\bar{s} + \varphi_0 \qquad \text{(закрытый профиль)}. \tag{9}$$

Здесь $\omega(s)$ — секторная площадь; Ω^* — удвоенная площадь, ограниченная срединной линией закрытого профиля; $h(s)$ — толщина профиля.

В задаче о кручении постоянная φ_0 определяется из приближенно записанного условия статической эквивалентности нулю напряжений σ_z:

$$\iint\limits_{(\Omega)} \varphi(x, y)\, dx\, dy \cong \int \varphi(s)\, h(s)\, ds = 0. \tag{10}$$

Тогда, на основании (9) и (10):

$$\varphi(s) = -\bar{\omega}(s) = -\left[\omega(s) - \frac{1}{\Omega}\int_0^l \omega(s)\, h(s)\, ds\right], \tag{11}$$

$$\varphi(s) = -\bar{\bar{\omega}}(s) = -\left[\omega(s) - \Omega^* \bar{s} - \frac{1}{\Omega}\oint (\omega(s) - \Omega^* \bar{s})\, h\, ds\right]. \tag{12}$$

Здесь l — длина срединной линии открытого профиля, $\bar{\omega}(s)$ и $\bar{\bar{\omega}}(s)$ — главные секториальные площади в задачах об открытом и закрытом профилях.

Подстановка (11) и (12) в выражение для I_φ:

$$I_\varphi = \iint\limits_{(\Omega)} \varphi^2\, dx\, dy \cong \int \varphi^2(s)\, h(s)\, ds$$

приводит к совпадению формулы (6) с основными соотношениями теорий В. З. Власова и А. А. Уманского (4).

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступило
19 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, 1948. [2] Н. В. Зволинский, Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 101 (1939). [3] Л. С. Гильман и С. С. Голушкевич, Тр. Высш. инж. училища ВМФ, № 4, 81 (1943). [4] Г. Ю. Джанелидзе и Я. Г. Пановко, Статика упругих тонкостенных стержней, 1948.