

Н. Н. ВЕРИГИН

ФИЛЬТРАЦИЯ ВОДЫ ИЗ ОРОСИТЕЛЯ ИРРИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 5 IV 1949)

Для исследования действия оросителей ирригационных систем важное значение имеет задача о фильтрации воды в почву из одиночного оросителя. Пусть имеется ороситель бороздового типа с поперечным сечением $c_1 c_3 c_2$, близким к окружности и шириною по верху B (рис. 1). Ороситель наполнен водой до уровня поверхности земли, принимаемой за горизонтальную плоскость.

Фильтрация воды из такого оросителя происходит под действием силы тяжести, а также капиллярных сил. При этом под влиянием капиллярности почвы некоторая часть поля вблизи оросителя ($c_1 b_1$ и $c_2 b_2$ на рис. 1) оказывается насыщенной водой. Область насыщения грунта под оросителем слева и справа ограничивается

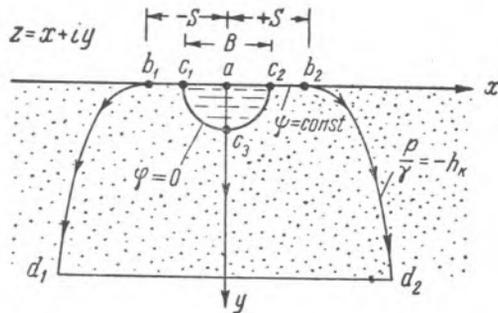


Рис. 1

поверхностью депрессии $b_1 d_1$ и $b_2 d_2$, уходящей в бесконечность, где скорость фильтрации воды равна коэффициенту фильтрации k .

При решении этой задачи наибольший практический интерес представляет величина радиуса капиллярного растекания воды в стороны от оросителя S , а также фильтрационный расход из оросителя Q .

Заменим ороситель точечным источником интенсивностью Q и для течения, вызываемого этим источником, назовем следующие граничные условия: 1) на $b_1 d_1$: $p/\gamma = h + y = -h_k = \text{const}$, $\psi = Q/2$; 2) на $b_2 d_2$: $p/\gamma = -h_k$, $\psi = -Q/2$; 3) на $b_1 c_1$: $\psi = Q/2$; 4) на $b_2 c_2$: $\psi = -Q/2$; 5) на $c_1 c_3 c_2$: $\varphi = -kh = 0$, где p/γ — высота давления, ψ — функция тока, φ — потенциал скорости, h — напор, h_k — высота вакуума, обусловленного капиллярными силами в грунте, k — коэффициент фильтрации, Q — расход оросителя.

Таким образом, во внешний контур области фильтрации $z = x + iy$ здесь входят некоторые особые границы, а именно линии капиллярного тока $c_1 b_1$ и $c_2 b_2$ (рис. 1). Геометрическая форма этих линий определяется очертанием поверхности земли вблизи оросителя и потому является известной. Функция тока ψ на этих линиях постоянна, а давление p изменяется от 0 у зеркала воды в оросителе до $-\gamma h_k$ на депрессионной кривой (γ — удельный вес воды).

Такие граничные условия для капиллярной зоны впервые были предложены В. В. Ведерниковым (1). Им же указан метод решения подобных задач, основанный на использовании функции, обратной сопряженной скорости $1/\bar{v}$. С помощью этого метода В. В. Ведерниковым (1) рассмотрена фильтрация

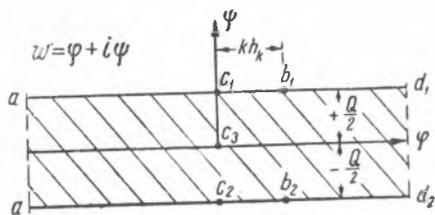


Рис. 2

из канала трапециoidalного сечения и Б. К. Ризенкампом (2) — фильтрация из канала большой ширины и малой глубины. Однако для расчета оросителей результаты указанных исследований применить затруднительно. Так, в (1) численное решение дано только для канала с одиночными откосами, и потому радиус капиллярного рассасывания воды по горизонтальной поверхности поля S не может быть определен. Принятое в (3) очертание русла канала, характеризующееся большим отношением ширины канала к его глубине, существенно отличается от реальной формы поперечного сечения оросителей. Кроме того, в (3), из-за медленной сходимости рядов, крайне затрудняется определение S при больших значениях h_k/B , что для оросителей чаще всего имеет место на практике.

Приводимое ниже решение получено специально для оросителей и потому свободно от указанных выше особенностей аналогичных решений для каналов.

При принятых выше граничных условиях область комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ будет представлять собою бесконечную полосу ad_1d_2a (рис. 2).

В области обратной сопряженной скорости $\frac{1}{\bar{v}} = \frac{1}{v_x - iv_y}$ рассматриваемое течение представится в виде бесконечной полосы $b_1b_2b_2b_1$ (рис. 3). При этом в точках b_1 и b_2 , где внутренние углы контура потока меньше π , скорость фильтрации будет равна 0.

Введем теперь вспомогательную полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 4). При соответствии точек внешнего контура потока, указанном на рис. 1—4, конформное отображение w на ζ дает:

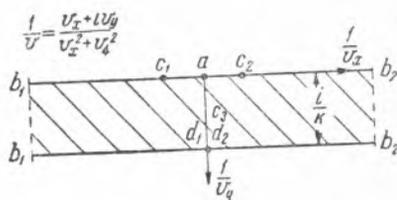


Рис. 3

$$w = -C \int_{\beta}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} + D = -C \ln \frac{\zeta}{\beta} + D, \quad (1)$$

где C и D — произвольные постоянные.

Конформное отображение $1/\bar{v}$ на ζ приводит к соотношению:

$$\frac{1}{\bar{v}} = \frac{dz}{d\omega} = -A \int_{\beta}^{\zeta} \frac{d\zeta}{1-\zeta^2} + B = -\frac{A}{2} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + B, \quad (2)$$

где A и B — произвольные постоянные, $z = x + iy$ — комплекс области потока (рис. 1), $\bar{v} = v_x - iv_y$ — комплекс, сопряженный с комплексом скорости, v_x и v_y — компоненты скорости фильтрации.

Переходя к полярным координатам вместо (1) и (2) получим:

$$w = -C \left(\ln \frac{\zeta_0}{\beta} + i\theta \right) + D, \quad (3)$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{A}{2} \ln \frac{1 + \zeta_0 (\cos \theta + i \sin \theta)}{1 - \zeta_0 (\cos \theta + i \sin \theta)} + B, \quad (4)$$

где ζ_0 — модуль, а θ — амплитуда $\zeta = \xi + i\eta$.

Из (3) для точки c_2 , т. е. при $\zeta_0 = \beta$, $\theta = 0$ и $w = -iQ/2$, имеем:

$$D = -iQ/2. \quad (5)$$

Точно так же из (3) для точки b_2 , т. е. при $\zeta_0 = 1$, $\theta = 0$ и $w = kh_k - iQ/2$, будет:

$$C = kh_k / \ln \beta. \quad (6)$$

Из (4) для точки a , где $\zeta_0 = 0$ и $1/v = 0$, имеем:

$$B = 0. \quad (7)$$

И, наконец, из (4) для точки d_2 , где $\zeta_0 = \infty$, $\theta = \pi/2$ и $1/v = i/k$, получим:

$$A = 2/\pi k. \quad (8)$$

Вводя (5) — (8) в (1) и (2), найдем:

$$w = -kh_k \frac{\ln(\zeta/\beta)}{\ln \beta} - i \frac{Q}{2} = -kh_k \frac{\ln(\zeta_0/\beta)}{\ln \beta} - i \frac{kh_k}{\ln \beta} \theta - i \frac{Q}{2}, \quad (9)$$

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{1}{\pi k} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} = -\frac{1}{\pi k} \ln \frac{1+\zeta_0(\cos \theta + i \sin \theta)}{1-\zeta_0(\cos \theta + i \sin \theta)}. \quad (10)$$

Дифференцируя (9) по ζ и умножая результат на (10), будем иметь:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{h_k}{\pi \ln \beta} \frac{1}{\zeta} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad (11)$$

откуда, после интегрирования, найдем ((4), стр. 73, № 25):

$$z = -\frac{2h_k}{\pi \ln \beta} \left(\zeta + \frac{1}{3^2} \zeta^3 + \frac{1}{5^2} \zeta^5 + \frac{1}{7^2} \zeta^7 + \dots \right). \quad (12)$$

Принимая в (12) для точки c_2 $z = B/2$ и $\zeta = \beta$, получим:

$$\frac{B}{2} = -\frac{2h_k}{\pi \ln \beta} \left(\beta + \frac{1}{9} \beta^3 + \frac{1}{25} \beta^5 + \dots \right). \quad (13)$$

Полагая в (12) для точки b_2 $z = S$ и $\zeta = 1$, имеем:

$$S = -\frac{2h_k}{\pi \ln \beta} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = -\frac{\pi h_k}{4 \ln \beta}, \quad (14)$$

так как сумма ряда в скобках равна $\pi^2/8$ ((4), стр. 245, № 14).

Те же соотношения (13) и (14) получаются и для точек c_1 и b_1 .

Полагая далее в (9) для точки b_1 $w = kh_k + iQ/2$, $\zeta_0 = 1$ и $\theta = \pi$, найдем:

$$Q = \frac{\pi kh_k}{\ln \beta}, \quad (15)$$

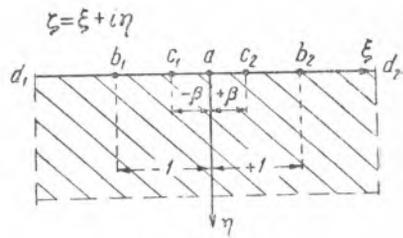


Рис. 4

или, выражая в (15) h_k через S по (14):

$$Q = 4kS. \quad (16)$$

Из (16) следует, что в бесконечности (при $z = \infty$), где скорость фильтрации $v = k$, ширина фильтрационного потока из оросителя равна $4S$, т. е. удвоенной ширине зоны капиллярного насыщения на поверхности поля.

Определение радиуса капиллярного растекания воды S и расхода Q производится в следующем порядке: по (13) при известных B и h_k находится β , затем по (14) находится S , а по (16) Q . Из выражений (9) и (12) нетрудно также получить уравнение депрессионных кривых $b_1 d_1$ и $b_2 d_2$, а также уравнение русла оросителя $c_1 c_3 c_2$.

Отметим, что русло оросителя в области ζ изображается окружностью $\xi^2 + \eta^2 = \beta^2$; в области z оно представляет собою некоторую кривую, также весьма близкую к окружности. Из (9) и (12) при $p/\gamma = y + h = 0$ определяется также граница зоны капиллярной фильтрации, где давление $p < 0$.

В табл. 1 приводятся результаты некоторых вычислений по формулам (12) — (16).

Таблица 1

B/h_k	β	$2S/B$	S/h_k	Q/kh_k	Q/kB
0	0,0	∞	0	0	∞
0,0028	0,01	123,4	0,17	0,684	247,0
0,056	0,10	12,2	0,34	1,37	24,4
0,95	0,50	2,4	1,14	4,54	4,78
12,3	0,90	1,20	7,45	29,4	2,4
∞	1,0	1,0	∞	∞	2,0

Нижняя строка табл. 1 соответствует случаю, когда капиллярные силы в грунте отсутствуют ($h_k = 0$). В этом случае $S = B/2$ и $Q = 2kB$, что совпадает с результатом В. В. Ведерникова⁽²⁾ для фильтрации из канала, имеющего максимальную глубину $H = B/2$. Выше лежащие строки табл. 1 относятся к капиллярным грунтам ($h_k > 0$). Из этих строк видно, что при обычной в практике орошения ширине борозд (оросителей) в 0,20—0,30 м и значении $h_k = 1—2$ м радиус капиллярного растекания воды может достигать от 0,3 до 1,2 м при расходе воды на орошение от 18 kB до 25 kB . Таким образом, при указанных условиях расход воды из оросителя за счет влияния капиллярности почвы возрастает в 9—12 раз.

Любопытно отметить, что, как следует из табл. 1, радиус капиллярного растекания воды вдоль горизонтальной поверхности земли S может значительно превышать высоту капиллярного вакуума h_k . При этом величина S/h_k тем больше, чем меньше абсолютная величина h_k , что указывает на существенное значение горизонтального капиллярного всасывания воды даже для слабо капиллярных почв.

Поступило
5 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Ведерников, ДАН, 28, № 5 (1940). ² В. В. Ведерников, Теория фильтрации и ее приложения в области ирригации и дренажа, 1939. ³ Б. К. Ризенкампф, Гидравлика грунтовых вод, Саратов, 1940. ⁴ И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 1943.