Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

*МАТЕМАТИКА*

В. А. ЯКУБОВИЧ

# НЕКОТОРЫЕ КРИТЕРИИ ПРИВОДИМОСТИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 6 IV 1949)*

Дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{1}$$

($x$ — $n$-мерный вектор; $A(t) = (a_{ij}(t))$ — матрица порядка $n$; $a_{ij}(t)$ — непрерывные функции $t$, принимающие, вообще говоря, комплексные значения).

Решение системы (1) $x(t,\ t_0,\ x_0)$ линейно зависит от начальных данных: $x(t,\ t_0,\ x_0) = X(t,\ t_0)\,x_0$. Матрица $X(t,\tau)$ обладает свойствами:

$$\frac{d}{dt}X(t,\tau) = A(t)\,X(t,\tau), \quad \frac{d}{d\tau}X(t,\tau) = -X(t,\tau)\,A(\tau),$$

$$X(t,s)\,X(s,\tau) = X(t,\tau), \quad X(t,t) = E, \quad X(t,\tau)^{-1} = X(\tau,t).$$

Столбцы матрицы $X(t,t_0)$ являются $n$ линейно независимыми решениями уравнения (1); строки матрицы $X(t_0,t)$ являются $n$ линейно независимыми решениями сопряженного уравнения. $X(t,t_0)$ есть, таким образом, матрица фундаментальной системы решений уравнения (1). В дальнейшем $X(t,t_0)$ будем называть просто фундаментальной матрицей.

Система (1) называется приводимой (определение Ляпунова), если заменой

$$x = P(t)\,y,$$

где

$$\| P(t) \| \leqslant \text{const}, \quad \| P(t^{-1} \| \leqslant \text{const}\,^*, \tag{2}$$

система (1) приводится к системе

$$\frac{dy}{dt} = Ky \tag{3}$$

($K$ — постоянная матрица).

---

* Под нормой матрицы $A = (a_{ij})$ всюду в дальнейшем понимается $\| A \| = \sqrt{\sum_{ij} | a_{ij} |^2}$. Можно было бы норму определить как $\max_{ij} | a_{ij} |$ или $\sum_{ij} | a_{ij} |$.

Предполагается, конечно, что существует и непрерывна матрица производных $dP/dt$. В зависимости от того, где выполнено (2), — при $t \to +\infty$, при $t \to -\infty$ или всюду, система является приводимой при $t \to +\infty$, при $t \to -\infty$ или всюду.

Фундаментальная матрица системы (3) есть $Y(t, \tau) = e^{K(t-\tau)}$. Приводимость системы (1), по определению, означает, что

$$X(t, t_0)\, x(t_0) = P(t)\, Y(t, t_0)\, y(t_0) = P(t)\, e^{K(t-t_0)} P(t_0)^{-1} x(t_0).$$

Так как $x(t_0)$ — произвольный вектор, то приводимость системы (1) означает, что

$$X(t, t_0) = P(t)\, e^{K(t-t_0)} P(t_0)^{-1} \tag{4}$$

(тождество по $t$ и $t_0$), или, что равносильно предыдущему, что

$$X(t, t_0) = P_1(t)\, e^{K_1(t)} \tag{5}$$

(тождество по $t$). Здесь снова $\| P_1(t) \| \leqslant \text{const}$, $\| P_1(t)^{-1} \| \leqslant \text{const}$ $(P_1(t) = P(t)\, e^{-Kt_0} P(t_0)^{-1},\ K_1 = P(t_0)\, K P(t_0)^{-1})$. Замена $x = P_1(t)\, y$ приведет к системе (3) с матрицей $K_1$.

Обстоятельному исследованию приводимости посвящена работа Н. П. Еругина ([1]). Ляпуновым доказано, что система (1) с периодическими коэффициентами (т. е. $A(t+\omega) = A(t)$) приводима.

Можно доказать следующие критерии приводимости, которые являются незначительными обобщениями критерия, данного Ляпуновым:

I. $A(t+\omega) = SA(t)\, S^{-1}$, где $S$ — матрица, которая приводится к диагональному виду с диагональными элементами, по модулю равными единице (т. е. $S$ эквивалентна унитарной матрице).

II. $A(t) = B(t) + \varphi(t)\, C$, $CB(t) = B(t)\, C$, $B(t+\omega) = B(t)$, $C$ приводится к диагональному виду с чисто мнимыми диагональными элементами, $\varphi(t)$ — произвольная действительная непрерывная функция.

III. $A(t) = B(t) + \varphi(t)\, C$, $CB(t) = B(t)\, C$, $B(t+\omega) = B(t)$, $\varphi(t)$ — непрерывная функция, для которой $\int\limits_0^t \varphi(s)\, ds = \alpha t + \psi(t)$, где $|\psi(t)| \leqslant \text{const}$.

IV. $A(t) = B_1(t) + \dots + B_r(t)$, $B_i(t) B_j(s) = B_j(s) B_i(t)$, $B_i(t+\omega_i) = B_i(t)$, $i, j = 1, \dots, r$ $(i \neq j)$.

Если $S = E$ или $C = 0$, то I, II, III означают, что $A(t)$ — периодическая матрица (случай Ляпунова).

Докажем I. $\frac{d}{dt}[S^{-1} X(t+\omega, \omega)] = S^{-1} A(t+\omega)\, X(t+\omega, \omega) = A(t)\,[S^{-1} X(t+\omega, \omega)]$.

Таким образом, $S^{-1} X(t+\omega, \omega)$ и $X(t, 0) S^{-1}$ — две фундаментальные системы одного уравнения, равные при $t = 0$. Следовательно, $S^{-1} X(t+\omega, \omega) \equiv X(t, 0) S^{-1}$. $X(t+\omega, \omega) = X(t+\omega, 0)\, X(0, \omega) = SX(t, 0)\, S^{-1}$; $X(t+\omega, 0) = SX(t, 0)\, T$, где

$$T = S^{-1} X(\omega, 0), \qquad \operatorname{Det} T \neq 0. \tag{6}$$

Полагая $X(t, 0) = S^{t/\omega} Q(t)\, T^{t/\omega}$, получаем, что $Q(t+\omega) = Q(t)$, т. е. $\| Q(t) \| \leqslant \text{const}$, $\| Q(t)^{-1} \| \leqslant \text{const}$ при любых $t$. ($|\operatorname{Det} Q(t)| \geqslant \rho > 0$, так как $\operatorname{Det} Q(t)$ — непрерывная периодическая функция и нигде не обращается в нуль).

Обозначая

$$P(t)=S^{t/\omega}\,Q(t), \qquad K=\frac{1}{\omega}\ln T, \tag{7}$$

имеем $X(t,0)=P(t)\,e^{K(t)}$. В силу предположений, сделанных относительно $S$, матрицы $S^{t/\omega}$, $S^{-t/\omega}$ ограничены при всех $t$. Следовательно, $P(t)$, $P(t)^{-1}$ ограничены всюду, т. е. система приводима.

Если $S=E$ (случай Ляпунова), то из (6) и (7) имеем, что фундаментальная система (1) есть

$$X(t,0)=P(t)\,e^{Kt}, \quad \text{где } K=\frac{1}{\omega}\ln X(\omega,0); \qquad P(t+\omega)=P(t).$$

Используя теорему 3 из ([2]), можно получить еще один критерий приводимости. Именно:

Теорема. *Даны системы* (1), (3).

*Если сходится*

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{2m-2}\,\|A(t)-K\|\,dt, \tag{8}$$

*где $m$ — размер максимального ящика в канонической форме матрицы $K$, то уравнение* (1) *обладает фундаментальной системой вида $P(t)\,e^{Kt}$, $P(t)\to E$ при $t\to\infty$, т. е. система* (1) *приводима к системе* (3) *при $t\to\infty$.*

Н. П. Еругиным для некоторых частных случаев матрицы $K$ были получены лучшие критерии. Так, например, если $K$ — диагональная матрица с различными диагональными элементами, то, согласно (8), для приводимости должен сходиться $\int_{t_0}^{\infty}\|A(t)-K\|\,dt$. По Еругину же для приводимости достаточно, чтобы диагональные элементы матрицы $A(t)-K$ были $O(1/t^{1+\alpha})$, прочие $O(1/t)$. Однако, когда $K$ лишь приводится к диагональному виду с различными диагональными элементами, то критерий Еругина практически переходит в сходимость $\int_{t_0}^{\infty}\|A(t)-K\|\,dt$.

Доказательство теоремы. Произвольная матрица $P(t)$, которая приводит систему (1) к системе (3), удовлетворяет, как легко проверить, уравнению:

$$\frac{dP}{dt}=A(t)\,P-PK. \tag{9}$$

Доказать, что система (1) приводима к системе (3), означает поэтому доказать, что существует ограниченное решение (9) $P(t)$ такое, что $P(t)^{-1}$ существует и также ограничена при $t\to\infty$.

Уравнение (9) линейно относительно $P$, решение его полностью определяется заданием $P(t_0)$ и, как легко видеть, есть $P(t)=X(t,t_0)\,P(t_0)\,e^{K(t_0-t)}$. Поэтому, если $\operatorname{Det}P(t)\neq 0$ в одной точке, то $\operatorname{Det}P(t)\neq 0$ всюду.

Наряду с уравнением (9), рассмотрим

$$\frac{dQ}{dt}=KQ-QK\equiv\Re Q \tag{10}$$

($\mathfrak{R}$ — линейный оператор в пространстве линейных операторов данного $n$-мерного пространства). Уравнение (9) может быть записано в виде

$$\frac{dP}{dt} = \mathfrak{R}P + f(t, P), \quad f(t, P) = [A(t) - K]\, P. \tag{11}$$

Сравнивая (10) и (11), согласно теореме 3 из ([2]), имеем: если сходится $\int\limits_{t_0}^{\infty} t^{p-1} \| A(t) - K \| \, dt$, то между всеми ограниченными решениями (10) и (11) можно установить такое взаимно-однозначное соответствие, что $P(t) - Q(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Здесь $p-1$ есть максимальная степень полинома при $e^{\lambda t}$ с чисто мнимыми $\lambda$ в решении уравнения (10). Найдем $p-1$. Решение (10) есть, как легко проверить,

$$Q(t) \equiv e^{\mathfrak{R}t} Q_0 = e^{Kt} Q_0 e^{-Kt} \quad (Q_0 = Q(0)). \tag{12}$$

В матрице $e^{Kt}$ имеется функция $t^{m-1} e^{\lambda t}$; в матрице $e^{-Kt}$ имеется функция $(-t)^{m-1} e^{-\lambda t}$. После перемножения эти функции встретятся, и в $e^{\mathfrak{R}t} Q_0$ будет, таким образом, функция $t^{2m-2}$. Поэтому $p - 1 \leqslant 2m - 2$. Так как $p-1$ — размер максимального ящика, то в решении не будет полиномов степени большей, нежели $2m-2$.

При $Q_0 = E$ решение $Q(t) \equiv E$ и, следовательно, найдется $P(t) \to E$ при $t \to \infty$.

Отсюда следует, что для достаточно большого $t$ существует $P(t)^{-1}$, и поэтому, как было указано выше, $P(t)^{-1}$ существует всюду.

Так как $P(t) \to E$, то $P(t)^{-1} \to E$ и, следовательно, (2) выполнено. Согласно (4), $X(t, 0)\, P(0) = P(t)\, e^{Kt}$; и теорема полностью доказана.

Из этой теоремы следует, например, следующая теорема, доказанная Wintner'ом ([3]) для частного случая.

Теорема. *Дано уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{R}{t} x + G(t)\, x;$$

*$R$ — постоянная матрица, $G(t)$ непрерывна по $t$ при $0 < t \leqslant t_0$ и при $t \to +0$ $G(t) = O(1/t^{\alpha})$, $\alpha < 1$.*

*В этом случае уравнение имеет фундаментальную систему вида $P(t)\, t^R$, где $P(t) \to E$ при $t \to +0$.*

Теорема доказывается заменой $t = e^{-\tau}$ и применением предыдущей теоремы.

Для случая, когда $G(t)$ — регулярная функция при $t = 0$ и $R$ приводится к диагональному виду, аналогичная теорема имеется у В. И. Смирнова ([4]). Wintner'ом теорема доказана в предположении, что $\alpha = 0$ и „cross-modul" матрицы $R$ $\sup\limits_{\|X\| = 1} \| XR - RX \| < 1$.

Можно было бы на $G(t)$ накладывать более слабые ограничения.

Научно-исследовательский
институт математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 II 1949

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. П. Еругин, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, в. 13 (1946). [2] В. А. Якубович, ДАН, 63, № 4 (1948). [3] A. Wintner, Am. J. Math., 68, № 2, 185 (1946). [4] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, III, 1933, стр. 577—578.