Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

В. С. ЧАРИН

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ УСЛОВИИ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 30 III 1949)

В работе С. Н. Черникова (1) показано, что в случае произвольных локально-конечных p-групп условие минимальности для нормальных делителей и условие минимальности для подгрупп равносильны. Естественно возникает вопрос о равносильности этих условий в случае более широкого класса локально разрешимых групп. Оказывается, что даже в случае локально разрешимых групп, обладающих рядом коммутантов конечной длины (т. е. в случае разрешимых групп), эти условия не равносильны. В настоящей заметке установлено, что существуют разрешимые периодические группы с условием минимальности для нормальных делителей и не удовлетворяющие условию минимальности для подгрупп. Ниже построим пример группы такого рода.

Пусть P — простое поле с характеристикой, равной некоторому фиксированному простому числу p. Пусть q — простое число, отличное от p. Совокупность корней $x^{q^n}-1=0$ образует мультипликативную группу порядка q^n, так как q не делится на характеристику поля P (2). Совокупность их при $n=1, 2, \ldots$ образует мультипликативную группу Q типа q^∞.

Образуем бесконечное поле R присоединением всех корней уравнений $x^{q^n}-1=0$ к простому полю P. Это можно сделать последовательным присоединением: если θ_n — первообразный корень $x^{q^n}-1=0$, то образуем расширение

$$R_n = P(\theta_n)$$

поля P, которое содержит все корни этого уравнения. Тогда получаем бесконечную последовательность

$$R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_n \subset R_{n+1} \subset \ldots,$$

объединение которой дает поле R.

Поле R имеет счетное число элементов и является абелевой группой по сложению. Каждый элемент этой группы имеет простой порядок p, а потому она может быть разложена в прямую сумму счетного числа циклических групп простого порядка p.

Каждый элемент b поля R можно представить в форме

$$b = a_0 + a_1\zeta_1 + \cdots + a_m\zeta_m,$$

где ζ_i — элементы Q, a_i — элементы P.

Образуем теперь расширение аддитивной группы поля R с помощью группы Q.

Пусть G — совокупность пар (x, y), где $x \in Q$, $y \in R$. Определим операцию умножения так:

$$(x, y)\cdot(x', y') = (xx', xy' + y).$$

Это множество пар образует группу с единицей $(1, 0)$. Проверим, например, закон ассоциативности.

$$[(x, y)(x', y')](x'', y'') = (xx', xy' + y)(x'', y'') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y),$$

$$(x, y)[(x', y')(x'', y'')] = (x, y)(x'x'', x'y'' + y') =$$

$$= (xx'x'', x(x'y'' + y') + y) = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y).$$

Итак:

$$[(x, y)(x', y')](x'', y'') = (x, y)[(x', y')(x'', y'')].$$

Совокупность R' всех элементов вида $(1, y)$ изоморфна аддитивной группе R и есть нормальный делитель G. Кроме того, G / R' изоморфна группе Q. Следовательно, группа G является рисширением аддитивной группы поля R с помощью группы Q.

Для (x, y) обратным элементом является $(x, y)^{-1} = (1 / x, -y / x)$. Сопряженным для элемента (a, b) будет $(x, y)(a, b)(x, y)^{-1} = (a, (1-a)y + bx)$.

Найдем все нормальные делители группы G. Пусть D — один из них. Рассмотрим отдельно следующие единственно возможные случаи:

1. В D существует элемент (a, b) такой, что a не равно единице, $(x, y)(a, b)(x, y)^{-1} \in D$; следовательно, $(a, (1-a)y+bx) \in D$; так как $1-a \neq 0$, то уравнение $(1-a)y + bx = z$ разрешимо относительно y при всех $z \in R$. Поэтому $(a, z) \in D$ при $z \in R$. Отметим, кроме того, что в этом случае D содержит все элементы вида $(1, z)$. В самом деле, $(a, z) \in D$; точно так же $(1 / a, 0) \in D$; поэтому $(a, z)(1 / a, 0) = (1, z) \in D$.

Поэтому нормальный делитель D состоит из пар (a, b), причем все a принадлежат подгруппе группы Q, а b — всевозможные элементы R.

2. Пусть теперь D имеет только элементы вида $(1, b)$; если $b = 0$ всегда, то D состоит из единственного элемента $(1, 0)$; если же имеется элемент $(1, b)$ и $b \neq 0$, то D состоит из всех пар вида $(1, y)$, где $y \in R$. В самом деле, $(x, y)(1, b)(x, y)^{-1} = (1, bx) \in D$ при всех $x \in Q$.

Пусть $b^{-1} = a_0 + a_1\zeta_1 + \cdots + a_m\zeta_m$. Так как $(1, y)(1, z) = (1, y + z)$, то вообще $(1, ba_i) \in D$, и так же $(1, ba_i\zeta_i) \in D$,

$$\left(1, \sum_1^m ba_i\zeta_i\right) = \left(1, b\sum a_i\zeta_i\right) = (1, bb^{-1}) = (1, 1) \in D,$$

поэтому $(1, y) \in D$ при всех $y \in R$.

Итак, доказано, что всякий нормальный делитель D составлен из пар (a, b), где a может пробегать некоторую подгруппу группы Q, а b пробегает все элементы R, т. е. D содержит нормальный делитель R' или D совпадает с единичной подгруппой группы G. Значит, совокупность нормальных делителей группы G удовлетворяет условию минимальности; но G не удовлетворяет такому условию по подгруппам; кроме того, она разрешима и локально конечна.

Поступило
27 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, ДАН, 58, 1287 (1947). [2] Ван дер Варден, Современная алгебра, ч. 1, 1947, стр. 148—149.