Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

М. Б. ХАЗАНОВ

О ПЛОЩАДЯХ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 1 IV 1949)

Принцип положительности площади и постулат о части и целом в настоящей работе исключаются, и строится новая теория площадей на плоскости Лобачевского, причем для ограниченных фигур новая мера площади не отличается от обычной.

§ 1. Об угловой площади

Теорема 1. *Существует точно одна функция, S, которая определена для всех треугольников и угловых полей* ([1], [2]) *на плоскости Лобачевского так, что для конгруэнтных областей указанного вида она принимает равные конечные значения, обладает аддитивным свойством, удовлетворяет требованию непрерывности, причем S для любого треугольника выражается произведением его дефицита на квадрат радиуса кривизны R^* пространства Лобачевского; эта функция S для углового поля $\hat{\alpha}$* ($\alpha > 0$**) *однозначно определена и выражается числом* $(-\alpha)\cdot R^2$.

Непрерывность функции области мы предполагаем установленной с помощью ε-окрестности границы области ([3]), даже когда область открытая; под ε-окрестностью полупрямой подразумеваем простой асимптотический треугольник ([4]), а под ε-окрестностью прямой — двукратно асимптотический четырехугольник с площадью, равной или меньшей ε ($\varepsilon > 0$), внутри которого находятся все точки полупрямой или, соответственно, прямой.

Если S существует, то

$$S(\hat{\alpha}) = -\alpha\cdot R^2, \tag{1}$$

что сразу получается, если разложить угловое поле $\hat{\alpha}$ на двукратно асимптотический треугольник ([4]) и полуплоскость и учесть явную пропорциональность $S(\hat{\alpha})$ числу α.

Для доказательства существования функции S предпринимаем проверку с помощью овального абсолюта на проективной плоскости, прежде всего, аддитивного свойства функции, определяемой равенством (1). Это удается сделать сначала для случаев, когда поле $\hat{\alpha}$ рассекается на треугольник и угловые поля прямыми, попарно не пересекающимися внутри поля $\hat{\alpha}$, а затем и в остальных случаях (если

* Это значение R мы сохраняем во всем последующем изложении.

** Здесь и в дальнейшем углы измерены так, что прямому углу соответствует $\alpha = \pi / 2$.

только число секущих прямых конечно). Очевидно, далее, что функция (1) удовлетворяет требованию непрерывности и для конгруэнтных угловых полей принимает равные значения. После изложенного заключаем, что функция S, охарактеризованная условиями теоремы 1, существует и определена однозначно.

$S(\hat{\alpha})$ мы условимся называть площадью углового поля $\hat{\alpha}$ или просто угловой площадью. Очевидно, что для треугольников функция S совпадает с их площадью (понимаемой в обычном смысле).

§ 2. О компонируемых фигурах

Будем называть фигуру компонируемой, если она составлена из конечного числа треугольников (простых и асимптотических) и угловых полей. Площадью такой фигуры будем называть сумму площадей треугольников и угловых полей, из которых составлена рассматриваемая компонируемая фигура.

Теорема 2. *Существует точно одна функция, которая определена для всех компонируемых фигур на плоскости Лобачевского так, что для любого треугольника и углового поля она совпадает с его площадью S, рассмотренной в § 1, и которая для конгруэнтных компонируемых фигур принимает равные значения, обладает аддитивным свойством и удовлетворяет требованию непрерывности; эта функция совпадает с площадью компонируемой фигуры.*

Доказательство проводится в том же плане, что и для теоремы 1.

Теорема 3. *Если угловые поля $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ имеют равные площади, то они конгруэнтны.*

Это очевидно.

Для компонируемых фигур мы можем установить понятия о равносоставленности и равнодополнительности, как, например, в ([5]), с той только особенностью, что в качестве элементарных фигур мы будем рассматривать не только простые треугольники, но и простые асимптотические треугольники и угловые поля.

Теорема 4. *Если две компонируемые фигуры имеют равные площади, то эти фигуры являются равнодополнительными.*

Сначала отметим два вспомогательных предложения:

1°. Каждый простой асимптотический треугольник вместе со смежным угловым полем (внешний угол треугольника) образует угловое поле.

2°. Каждый простой треугольник вместе со смежным угловым полем (внешний угол треугольника) образует фигуру, составленную из двух угловых полей.

Если Φ_1 и Φ_2 — компонируемые фигуры с равными площадями, то объединяя фигуру Φ_1 с угловыми полями, дополняющими простые и асимптотические треугольники, входящие в Φ_1 и Φ_2, до угловых полей, получим фигуру F_1, составленную из угловых полей; поступая аналогично с фигурой Φ_2, т. е. объединяя ее с теми же угловыми полями, что и Φ_1, мы получим фигуру F_2, составленную из угловых полей. Легко заметить, что площади фигур F_1 и F_2 одинаковы, и, в силу теоремы 3, F_1 и F_2 можно разбить на конечное число соответственно конгруэнтных полей, т. е. F_1 и F_2 равносоставлены, а Φ_1 и Φ_2 равнодополнительны.

Если интерпретировать планиметрию Лобачевского на проективной плоскости как гиперболическую геометрию внутренней области овального абсолюта, то, очевидно, площадь компонируемой фигуры будет инвариантом автоморфизма относительно указанного абсолюта, т. е. инвариантом гиперболического движения и зеркального отражения.

§ 3. Некомпонируемые и квадрируемые фигуры

Фигура некомпонируема, если ее нельзя составить из конечного числа треугольников (простых и асимптотических) и угловых полей. Под площадью некомпонируемой фигуры условимся понимать предел (если он существует) площади компонируемой фигуры, покрывающей некомпонируемую фигуру с точностью до ε-окрестности последней, когда ε стремится к нулю любым способом, сохраняя положительное значение. Фигуры, которым можно приписать площадь, будем называть квадрируемыми.

Пусть кривая отнесена к системе осей x, y, составляющих правую двойку, в которой точкам плоскости приписываются перпендикулярные координаты Лобачевского. В этих условиях, если при движении точки по участку кривой возрастает угловой коэффициент касательной к кривой, то будем говорить, что движение точки происходило в сторону нормальной ориентации дуги, а область, которую покрывают касательные полупрямые, проведенные в сторону нормальной ориентации при рассмотренном перемещении точки по участку дуги, назовем нормальной областью со стороны выпуклости дуги. Часть плоскости, дополняющую нормальную область со стороны выпуклости дуги до всей плоскости, назовем нормальной областью со стороны вогнутости дуги.

Теорема 5. *Нормальные области, как со стороны выпуклости дуги, так и со стороны вогнутости дуги, квадрируемы. Их площади* (S_1 *и* S_2) *выражаются формулами:*

$$S_1 = -R^2 \int\limits_{\smile{AB}} d\omega, \tag{2}$$

$$S_2 = -2\pi R^2 + R^2 \int\limits_{\smile{AB}} d\omega, \tag{3}$$

где $d\omega$ — *угол смежности между касательными в двух бесконечно близких точках дуги* $\overset{\frown}{AB}$, *нормально ориентированной от* A *к* B.

Это следует из

$$S_1 = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta\omega_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (-R^2 \Delta\omega_i) = -R^2 \int\limits_{\smile{AB}} d\omega$$

и

$$S_1 + S_2 = -2\pi R^2.$$

Выражая $d\omega$ через кривизну $k(s)$, где s — длина дуги, находим формулы:

$$S_1 = -R^2 \int\limits_{\smile{AB}} k(s)\, ds, \tag{4}$$

$$S_2 = -2\pi R^2 + R^2 \int\limits_{\smile{AB}} k(s)\, ds, \tag{5}$$

когда дуга нормально ориентирована от A к B (A — начало дуги, B — ее конец).

При $k(s) = \text{const}$ формулы упрощаются. Формулы (2), (3), (4) и (5) верны и для замкнутой кусочно-гладкой дуги $\overset{\frown}{AB}$, гладкой в точке A; при этом S_2 выражает обычную площадь односвязной области, ограниченной замкнутым контуром $\overset{\frown}{AB}$, а интегрирование по контуру проводится при обходе области с левой стороны. Легко получаются формулы для площадей многосвязных областей как открытых, так и закрытых. Для открытой (бесконечной) односвязной области с n граничными линиями (бесконечными) площадь находится при „левом" обходе из выражения

$$R^2 \int d\omega - 2\pi R^2 + n\pi R^2. \tag{6}$$

Для ограниченной n-связной области площадь находится при „левом" обходе из выражения

$$R^2 \int d\omega - 2\pi R^2 + (2n-2)\pi R^2. \tag{7}$$

По найденным формулам непосредственно вычисляются площадь круга заданного радиуса, площадь сектора орицикла, площадь криволинейной трапеции и т. д. В наших формулах $d\omega$ определяется равенством

$$d\omega = d \operatorname{arc\,tg} \frac{dy/dx}{\operatorname{ch}(y/R)} - \frac{1}{R} \operatorname{sh} \frac{y}{R}\, dx$$

или любым другим, ему равносильным.

§ 4. Расширение постулата Децольта

Постулат Децольта ([5]), очевидно, можно расширить и распространить на всю плоскость Лобачевского, на любую квадрируемую фигуру в этой области в том смысле, что квадрируемая фигура с треугольным вырезом неравносоставлена с той же фигурой без выреза (ибо площади их неравны). На плоскости Евклида мы наблюдаем противное, так, например, на ней угловое поле с треугольным вырезом равносоставлено (в нашем смысле) с тем же полем, но без выреза.

§ 5. Угловая площадь на плоскости Евклида

На плоскости Евклида можно ввести в рассмотрение угловые площади, если площади всех ограниченных фигур положить равными нулю.

Кабардинский педагогический институт
г. Нальчик

Поступило
31 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Энрикес, Новые идеи в математике, Сб. № 9, стр. 23, 24, 156 (1914). [2] L. Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, Genève, 1778. [3] Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, М.—Л., 1945, стр. 202. [4] Р. Бальдус, Неевклидова геометрия, М.—Л., 1933, стр. 133. [5] Д. Гильберт, Основания геометрии, М.—Л., 1948, стр. 132, 143.