Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

А. ФЕТ

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ГОМОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВА ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ НА СФЕРЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 24 III 1949)

1. Зададим на сфере S_2 с центром Q точку A, в A — направленную касательную к сфере t, и обозначим (τ) окружность, высекаемую из сферы плоскостью, проходящей через t и Q; $-\pi/2 \leqslant \tau \leqslant \pi/2$. Направим (τ) так, чтобы в A направление совпадало с направлением t. Зададим на сфере k кривых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, удовлетворяющих условиям (а): λ_i замкнуты, спрямляемы, проходят через A, не являются точкой или окружностью, все различны, снабжены направлениями. Дальше k будет нечетно. Тогда все k-окружности $(\tau_1\lambda_1, \ldots, \tau_k\lambda_k)$ (см. ([3])) образуют цикл $q_k \sim \Lambda_{12}^{(k+1)/2}$ ([2]). Будем теперь рассматривать эллипсоид с неравными осями, близкий к сфере. Его замкнутые геодезические (эллипсы) пусть будут g_l^1, g_l^2, g_l^3, где l — кратность обхода эллипса; соответствующие критические значения — c_l^N; $\ldots$, $c_{l-1}^3 < c_l^1 < c_l^2 < c_l^3 < c_{l+1}^1 \ldots$ Цикл q_{2k-1} без труда строится на эллипсоиде. Гомологии дальше — все целочисленные. Длина кривой Γ обозначается $J(\Gamma)$.

2. $q_{2k-1} \not\sim 0$ на пространстве Ω замкнутых кривых. Иначе имели бы $q_{2k-1} \sim 0$ по $\operatorname{mod} 2$, что противоречит результату Морса ([2]).

3. $2q_{2k-1} \sim 0$ на Ω. В самом деле, если $k > 1$, пусть $\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & 2k-1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_{2k-1} \end{pmatrix}$ — нечетная подстановка. Произведем деформацию кривых λ_i, при которой все время выполнены условия (а) и λ_i переходит в λ_{α_i}. Цикл q_{2k-1} при этом деформируется на Ω в $-q_{2k-1}$, т. е. $2q_{2k-1} \sim 0$. Если же $k = 1$, деформация q_1 в $-q_1$ осуществляется поворотом на π вокруг оси QA *.

4. Определение. Пусть ζ — абсолютный или относительный $\operatorname{mod}(J < c)$ цикл Ω, лежащий в $(J \leqslant c)$. В окрестности невырожденной изолированной геодезической g (с соответствующим критическим значением c) симплексы ζ лежат на секущем многообразии M. Если $\operatorname{ind} g = \dim \zeta$, то пусть точка g принадлежит только k конгруентным симплексам ζ, лежащим в индексной гиперплоскости точки g и содержащим g внутри себя. Тогда скажем, что ζ *правильно расположен* относительно g (или c). Если еще $k \neq 0$ (где симплексы, конечно, считаются с их ориентациями), скажем, что ζ *правильно висит* на g с показателем k.

Любой цикл из $(J \leqslant c)$ можно правильно расположить на c.

Лемма. *Пусть ζ правильно висит на g с показателем k, $J(g) = c$. Тогда либо на Ω $\zeta \not\sim 0$, либо $\overline{\mathrm{lh}}\,\zeta \geqslant c'$, где $\overline{\mathrm{lh}}$ — верхняя гомологическая грань* ([1]), *а $c' > c$ — ближайшее критическое значение.*

---

* Замечание Л. А. Люстерника.

Если бы было $\zeta \not\sim 0$ и $\overline{\mathrm{lh}}\,\zeta < c'$, то имели бы $\overline{\mathrm{lh}}\,\zeta \leqslant c$, и в $(J \leqslant c)$ нашлась бы цепь E, так что $\Delta E = \zeta$. Эту цепь в окрестности g можно расположить на M (см. определение). Возьмем на гиперплоскости бо́льших значений в M симплекс H с центром в g. Пусть $\rho(\Delta H, g) = \rho$. Подразделим цепь $E \cap M$ на симплексы диаметра $< \rho$ и обозначим E' цепь из симплексов E, содержащих g и ориентированных как в E. Имеем на M: $0 = \Delta H \times E' = \pm H \times \Delta E' = H \times (\zeta \cap M)$, но правая часть, по условию, равна $k \neq 0$. Лемма доказана.

5. На геодезической g_l^2 четного индекса $2l$ не может правильно висеть $2l$-мерный цикл x.

Допустим обратное: x висит с показателем $k_x \neq 0$. Докажем, что $\overline{\mathrm{lh}}(2q_{2l-1}) = c_l^2$. Если бы было $\overline{\mathrm{lh}}(2q_{2l-1}) < c_l^2$, то, по лемме, имели бы $2q_{2l-1} \not\sim 0$ на Ω, вопреки п. 3. Не может быть и $\overline{\mathrm{lh}}(2q_{2l-1}) > c_l^2$, так как все геодезические длиннее g_l^2 имеют индексы $> 2l$. Пусть теперь $\Delta D = 2q_{2l-1}$, $D \in (J \leqslant c_l^2)$, D правильно расположена с показателем k_D на g_l^2. $k_D \neq 0$, иначе, сокращая симплексы, содержащие g, получили бы $\overline{\mathrm{lh}}(2q_{2l-1}) < c_l^2$. Цепь $k_x D - k_D x$ лежит в $(J < c_l^2)$; $\Delta(k_x D - k_D x) = 2q_{2l-1} \cdot k_x$; но точно так, как выше, получаем $\overline{\mathrm{lh}}\, 2k_x q_{2l-1} = c_l^2$, что дает противоречие. Применяя обычные сокращающие длину деформации, из только что доказанного имеем: **четномерные группы Бетти пространства Ω тривиальны.**

6. Геодезической g_l^3 принадлежит $(2l+1)$-мерный цикл u_{2l-1}, правильно висящий на ней с показателем 1 и не слабо гомологичный нулю на Ω (по п. 2, отсюда следует $q_{2l+1} \not\sim m u_{2l+1}$ при любом m).

Окружим g_l^3 секущим многообразием M; в индексной гиперплоскости g_l^3 возьмем $(2l+1)$-мерный симплекс T с центром в g_l^3 и границей σ_{2l}. По п. 5, $\sigma_{2l} \sim 0$ в $(J < c_l^3)$: $\sigma_{2l} = \Delta U$. Обозначим $u_{2l+1} = T - U$. Пусть при $m \neq 0$ $m u_{2l+1} \sim 0$ на Ω. Так как геодезические длиннее g_{l+1}^2 имеют индексы $> 2l$, $\overline{\mathrm{lh}}(m u_{2l+1}) \leqslant c_{l+1}^2$. Пусть $\Delta F = m u_{2l+1}$, где F правильно расположена на c_{l+1}^2 с показателем k_F. Из $k_F = 0$ следовало бы $\overline{\mathrm{lh}}(m u_{2l+1}) \leqslant c_l^3$, вопреки лемме; значит, $k_F \neq 0$. Построим для $2q_{2l+1}$ цепь D, как в п. 5. Имеем: $k_F D - k_D F \in (J < c_{l+1}^2)$. $\Delta(k_F D - k_D F) = 2k_F q_{2l+1} - k_D m u_{2l+1}$; значит, $\overline{\mathrm{lh}}(2k_F q_{2l+1} - k_D m u_{2l+1}) \leqslant c_{l+1}^1$. Из леммы и п. 2 имеем $k_D m u_{2l+1} \not\sim 0$ на Ω, против предположения.

7. Из предыдущего, принимая во внимание, что новые циклы могут возникать лишь при переходе через критическое значение, получим теорему:

$$\Delta_{2k}(\Omega) = 0, \qquad \Delta_{2k+1}(\Omega) = \Pi_0 \dot{+} \Pi_2, \tag{1}$$

где Π_0 — свободная циклическая группа, а Π_2 — циклическая порядка 2. Это первый пример кручений в функциональном пространстве. Из (1) алгебраически вычисляются группы по любой области коэффициентов g; при $g = \Pi_2$, в частности, получаем результаты Морса. Целочисленное кольцо гомологий оказывается тривиальным.

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
24 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Зейферт и В. Трельфалль, Вариационное исчисление в целом, 1938, русск. пер., 1947. [2] M. Morse, Calculus of Variations in the Large, 1934, Ch. IX. [3] А. Фет, ДАН, 66, № 3 (1949).