Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. И. ФЕЛЬДМАН

АПРОКСИМАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 2 IV 1949)

В дальнейшем символ $P(z)$ будет обозначать полином с целыми рациональными коэффициентами степени m и высоты H, не равный нулю тождественно.

В 1932 г. К. Малер (1) доказал неравенство

$$|P(\zeta)| \geqslant c_1(m) H^{-c^m},$$

где ζ — вещественный логарифм положительного рационального числа или $\zeta = \pi$, $c_1(m)$ и c — некоторые постоянные, не зависящие от H.

Метод А. О. Гельфонда (2-4) позволяет вывести оценку снизу для величины $P(\zeta)$ в виде явной функции не только от H, но и от n. Полное доказательство формулируемых ниже теорем довольно громоздко, поэтому в настоящей заметке приводятся лишь формулировки теорем и основных вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} z^k e^{lz},$$

где $C_{k,l}$ — постоянные коэффициенты.

Тогда

$$C_{k,l} = \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{\substack{x=0 \\ 2/x}}^{2q_0-2} f^{(s)}(\pi i x) \sum_{\tau=0}^{q_0-k-1} (-1)^\tau C_{k+\tau}^{\tau} \frac{(s+\tau)!}{s!} \frac{\Delta_{l,s+\tau}}{\Delta} \frac{\Delta_{1,x,k+\tau}}{\Delta_1} (\pi i)^{-k-\tau}.$$

Здесь Δ — определитель Вандермонда, построенный из элементов l^s, $l, s = 0, 1, \ldots, q-1$; $\Delta_{l,s+\tau}$ — алгебраическое дополнение элемента $l^{s+\tau}$ ($\Delta_{l,s+\tau} = 0$, если $s+\tau > q-1$); Δ_1 — определитель Вандермонда, построенный из элементов x^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, q_0-1$, $x = 0, 2, 4, \ldots, 2q_0-2$; $\Delta_{1,x,k+\tau}$ — алгебраическое дополнение элемента $x^{k+\tau}$ ($\Delta_{1,x,k+\tau} = 0$, если $k+\tau > q_0-1$).

Лемма 2. *Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$ — базис кольца целых чисел поля алгебраических чисел K, ζ — некоторое число, N — вещественный параметр, $\varepsilon > 0$, $\varphi_0(x)$ и $f_0(x)$ — вещественные функции, определенные для вещественных x, причем $f_0(x) \geqslant 1$, $\varphi_0(x) \underset{x\to\infty}{\to} \infty$. Пусть, далее, $R(z)$ и $Q(z)$ — полиномы, коэффициенты которых целые числа из K.*

Их степени $n \leqslant N$ *и* $n_1 \leqslant n f_0(N)$, *а высоты** $H \leqslant e^{N\varphi_0(N)}$ *и* $H_1 \leqslant e^{N\varphi_0(N) f_0(N)}$.

Если

$$|R(\zeta)| \leqslant e^{-(2\nu+\varepsilon) N\varphi_0(N) f_0(N) n}, \qquad |Q(\zeta)| \leqslant e^{-(2\nu+\varepsilon) N\varphi_0(N) f_0(N) n}$$

и $N \geqslant N_0(\zeta, \varepsilon, K, \omega_1, \ldots, \omega_\nu)$, *то полиномы* $R(z)$ *и* $Q(z)$ *имеют общий корень.*

Лемма 3. *Пусть* ζ — *некоторое число,* λ — *вещественное число. Если*

$$|P(\zeta)| \leqslant e^{\lambda m},$$

то в любом поле алгебраических чисел K *существует неприводимый полином* $p(z)$ *степени* $n \leqslant m$ *и высоты* $H_0 \leqslant e^{\gamma_0 m} H$, *где* γ_0 *зависит лишь от поля* K *и выбора в нем базиса кольца целых чисел, такой, что*

$$|p(\zeta)| \leqslant e^{\lambda n}.$$

Теорема 1. *Существует такое постоянное число* γ_1, *что*

$$|P(\pi)| \geqslant e^{-\gamma_1 m \max\{\ln H \ln\ln H,\ m \ln^2 m\}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \neq 1$ — *алгебраическое число.*

Существует такое число γ_2, *зависящее лишь от* α *и выбора ветви функции* $\ln z$, *что*

$$|P(\ln\alpha)| \geqslant e^{-\gamma_2 m^2 (1+\ln m) \max\{\ln H \ln\ln H,\ m \ln^2 m\}}.$$

Простыми следствиями теорем 1 и 2 являются

Теорема 1а. *Существует такое постоянное число* γ_3, *что*

$$|\pi - \theta| \geqslant e^{-\gamma_3 m \max\{\ln H \ln\ln H,\ m \ln^2 m\}},$$

где θ — *алгебраическое число степени* m *и высоты* H.

Теорема 2а. *Пусть* $\alpha \neq 1$ — *алгебраическое число.*

Существует такое число γ_4, *зависящее лишь от* α *и выбора ветви функции* $\ln z$, *что*

$$|\theta - \ln\alpha| \geqslant e^{-\gamma_4 m^2 (1+\ln m) \max\{\ln H \ln\ln H,\ m \ln^2 m\}},$$

где θ — *алгебраическое число степени* m *и высоты* H.

Теорема 2а дает возможность строить примеры трансцендентных чисел. Так, например, число e^α будет трансцендентным, если

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{m_1}\sqrt{1 + \frac{1}{m_2}\sqrt{1 + \frac{1}{m_3}\sqrt{\ldots}}}},$$

*Высотой полинома в этом случае называется максимум абсолютных величин координат его коэффициентов в их представлении через числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$.

где $m_s = 2^{2^{2s^2}}$. Число α можно задавать также в виде бесконечного ряда или бесконечного произведения.

Этот же метод с привлечением некоторых дополнительных сведений об эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z)$ позволяет доказать следующие теоремы:

Теорема 3. *Если инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции $\wp(z)$ — алгебраические числа, ω — период функции $\wp(z)$, то существует такое постоянное число γ_5, зависящее лишь от g_2, g_3 и ω, что*

$$|P(\omega)| \geqslant e^{-\gamma_5 m^4 \max\{\ln H \ln^4 \ln H,\, m \ln^6 m\}}.$$

Теорема 4. *Если инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции $\wp(z)$ — алгебраические числа, β — такое число, что $\wp(\beta)$ — алгебраическое число, $\varkappa$ и ε — положительные числа, то*

$$|P(\beta)| \geqslant e^{-\max M},$$

где

$$M = \left\{\ln H e^{m(\ln\ln H)^{0,5+\varepsilon}},\ e^{m^{2+\varkappa} + m^{(2+\varkappa)(0,5+\varepsilon)+1}}\right\},$$

если

$$\max\left(\ln H,\ e^{m^{2+\varkappa}}\right) \geqslant C_0(\varepsilon, \varkappa, \beta, g_2, g_3).$$

Из теорем 3 и 4 легко выводятся:

Теорема 3а. *Если инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции $\wp(z)$ — алгебраические числа, ω — период функции $\wp(z)$, то существует такое постоянное число γ_6, зависящее лишь от g_2, g_3 и ω, что*

$$|\omega - \theta| \geqslant e^{-\gamma_6 m^4 \max\{\ln H \ln^4 \ln H,\, m \ln^6 m\}},$$

где θ — алгебраическое число степени m и высоты H.

Теорема 4а. *Если инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции $\wp(z)$ — алгебраические числа, β — такое число, что $\wp(\beta)$ — алгебраическое число, $\varkappa$ и ε положительные числа, то*

$$|\omega - \theta| \geqslant e^{-\max M},$$

где θ — алгебраическое число степени m и высоты H и

$$\max\left(\ln H,\ e^{m^{2+\varkappa}}\right) \geqslant C_1(\varepsilon, \varkappa, \beta, g_2, g_3).$$

Трансцендентность чисел ω и β, рассматриваемых в теоремах 3, 3а, 4 и 4а, была установлена в 1936 г. Т. Шнейдером [5]. Все сформулированные теоремы эффективны и числа γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, γ_6, C_0 и C_1 могут быть вычислены.

Математический институт
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
31 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Mahler, J. reine u. angew. Math., 166, 118 (1932). [2] А. Гельфонд, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, 623 (1934). [3] А. О. Гельфонд, ДАН, 2, 177 (1935). [4] А. О. Гельфонд, Изв. АН СССР, сер. матем., 5—6, 509 (1939). [5] Th. Schneider, Math. Ann., 113, 1 (1936).