Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПОСТНИКОВ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 6 IV 1949)

Гильбертом было высказано предположение о том, что дзета-функция Римана не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению (гипертрансцендентность $\zeta(s)$). Это предположение было доказано Д. Д. Мордухай-Болтовским ([1], [4]) и позднее Островским ([2]). Интересно отметить, что эта теорема следует как частный случай из одной теоремы Л. С. Понтрягина ([3]).

Естественным обобщением вопроса о гипертрансцендентности рядов Дирихле является вопрос об их дифференциальной независимости. Мы будем говорить, что система рядов Дирихле

$$f_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{1n}}{n^s},\qquad f_2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n}}{n^s},\ \ldots,\ f_r(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{rn}}{n^s}$$

дифференциально зависима, если существует многочлен от $s, f_1(s), \ldots$ $\ldots, f_r(s)$ и их производных такой, что:

$$\Phi\left(s, f_k^{(t)}(s)\right)=0. \tag{1}$$

В настоящей работе мы докажем, что L-ряды Дирихле по характерам модуля m дифференциально независимы. При доказательстве я использую один прием, примененный Островским в его работе ([2]).

Лемма 1. *Если ряды Дирихле дифференциально зависимы, то из соотношения можно исключить s.*

Это тривиальное обобщение леммы 1 Островского ([2]).

Лемма 2. *Если ряды Дирихле обладают областью абсолютной сходимости и дифференциально зависимы, то они и формально дифференциальне зависимы.*

Это тривиальное обобщение соображений, имеющихся в работе ([2]).

Теорема 1. *Если система рядов Дирихле $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ дифференциально зависима, то если мы в этих рядах оставим лишь члены с простыми знаменателями, бо́льшими некоторого N, то для полученных рядов*

$$\overline{f_1(s)},\quad \overline{f_2(s)},\ \ldots,\ \overline{f_r(s)}$$

будет справедливо однородное соотношение

$$\sum \lambda_{j\nu}\bar{f}_j^{(\nu)}(s)=0, \tag{2}$$

где $\lambda_{j\nu}$ — постоянные, не все равные нулю.

Доказательство. Пусть соотношение будет:

$$\Phi(f_k^{(t)}(s)) = 0. \tag{1*}$$

Рассмотрим все $\partial\Phi / \partial f_j^{(\nu)}$. Пусть разложение $\partial\Phi / \partial f_j^{(\nu)}$ в ряд Дирихле начинается с $A_{j\nu} / l_{j\nu}^s$. Возьмем

$$\Lambda_1 = \min_{j,\nu} l_{j\nu} = l_{j_\mu, \nu_\varkappa},$$

где $(j_\mu, \nu_\varkappa)$ — система индексов, для которых достигается Λ_1.

Представим:

$$f_k(s) = F_{km}(s) + g_{km}(s), \qquad g_{km}(s) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_{kn}}{n^s}. \tag{3}$$

Очевидно, что если мы выберем m достаточно большим и подставим в $\partial\Phi / \partial f_j^{(\nu)}$ вместо $f_k^{(t)}(s)$ $F_{km}^{(t)}(s)$, то разложение снова начнется с $A_{j\nu} / l_{j\nu}^s$. Разложим $\Phi(f_k^{(t)}(s)) = \Phi(F_{km}^{(t)}(s) + g_{km}^{(t)}(s))$ в ряд Тейлора:

$$0 = \Phi(F_{km}^{(t)}(s)) + \sum \frac{\partial\Phi}{\partial f_j^{(\nu)}}\bigg|_{F_{km}^{(t)}(s)} g_{jm}^{(\nu)}(s) + \frac{1}{2}\left(\sum\sum\ldots\right) + \frac{1}{6}\left(\sum\sum\sum\ldots\right) + \ldots \tag{4}$$

Рассмотрим, с какого члена будут начинаться разложения в ряд Дирихле выражений $\frac{1}{2}\left(\sum\sum\ldots\right)$, $\frac{1}{6}\left(\sum\sum\sum\ldots\right)$ и т. д. Вторые, третьи и т. д. производные Φ могут начинаться хоть с 1, но произведения и степени $g_{jm}^{(\nu)}(s)$ должны начинаться по меньшей мере с $1 / m^{2s}$. Поэтому разложения выражений $\frac{1}{2}\left(\sum\sum\ldots\right)$, $\frac{1}{6}\left(\sum\sum\sum\ldots\right)$ должны начинаться по меньшей мере с $1/m^{2s}$. Будем брать $m > \Lambda_1$.

Рассмотрим, какой младший член будет в $\sum \frac{\partial\Phi}{\partial f_j^{(\nu)}}\bigg|_{F_{km}^{(t)}(s)} g_{jm}^{(\nu)}(s)$.

$g_{jm}^{(\nu)}(s)$ начинается с $\frac{a_{jm}(-\ln m)^\nu}{m^s}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial f_j^{(\nu)}}\bigg|_{F_{km}^{(t)}(s)}$ начинается с $\frac{A_{j\nu}}{l_{j\nu}^s}$. Итак, младший член будет

$$\frac{\sum A_{j_\mu\nu_\varkappa} a_{j_\mu m} (-\ln m)^{\nu_\varkappa}}{(\Lambda_1 m)^s}.$$

Возможны два случая:

1. Для всех простых p, начиная с некоторого,

$$\sum A_{j_\mu\nu_\varkappa} a_{j_\mu p} (-\ln p)^{\nu_\varkappa} = 0. \tag{5¹}$$

2. Есть бесконечная последовательность простых $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ таких, что для простых из этой последовательности

$$\sum A_{j_\mu\nu_\varkappa} a_{j_\mu p} (-\ln p)^{\nu_\varkappa} \neq 0. \tag{5²}$$

В первом случае теорема доказана

$$\sum A_{j_\mu\nu_\varkappa} \bar{f}_{j_\mu}^{(\nu_\varkappa)}(s) = 0.$$

Во втором случае, в силу $p > \Lambda_1$, $p^2 > \Lambda_1 p$. Поэтому член (отличный от нуля) $\frac{\sum A_{j_\mu \nu_\varkappa} a_{j_\mu p} (-\ln p)^{\nu_\varkappa}}{(\Lambda_1 p)^s}$ не может интерферировать с членами, происходящими от выражений $\frac{1}{2}\left(\sum\sum\ldots\right)$, $\frac{1}{6}\left(\sum\sum\sum\ldots\right)$. Но так как левая часть разложения в ряд Тейлора равна нулю, то этот член, чтобы уничтожиться, должен проинтерферировать с членами $\Phi(F_{km}^{(t)}(s))$. Но в знаменателях $\Phi(F_{km}^{(t)}(s))$ присутствуют лишь степени чисел меньших p. Поэтому $\Lambda_1 p = \Pi N_l$, $N_i \leqslant p-1$; $p = \frac{\Pi N_i}{\Lambda_1}$. Это противоречие. Таким образом, этот случай невозможен и теорема доказана.

Теорема 2. *L-ряды по характерам модуля m дифференциально независимы.*

Доказательство. Допустим противное. Из доказательства предыдущих теорем должно быть $\sum A_{j_\mu \nu_\varkappa} \chi_{j_\mu}(p)(-\ln p)^{\nu_\varkappa} = 0$ для всех достатоточно больших простых p. Так как $\chi_{j_\mu}(p)$ имеет лишь конечное число значений, а $\ln p$ бесконечно возрастает, то, располагая $\sum A_{j_\mu \nu_\varkappa} \chi_{j_\mu}(p)(-\ln p)^{\nu_\varkappa}$ по степеням $(-\ln p)$, убеждаемся, что должен быть равен нулю каждый коэффициент при степенях $(-\ln p)^{\nu_\varkappa}$, и мы получим по меньшей мере одно нетривиальное соотношение:

$$\sum A_{j_\mu \nu} \chi_{j_\mu}(p) = 0. \tag{6}$$

Пусть приведенная система вычетов по модулю m будет $\beta_1 = 1$, $\beta_2, \ldots, \beta_{\varphi(m)}$. Так как по теореме Дирихле простые числа распределены по всем прогрессиям, то имеем следующую систему равенств

$$\sum A_{j_\mu \nu} \chi_{j_\mu}(\beta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \varphi(m).$$

Но легко видеть, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \chi_1(\beta_1) & \ldots\ldots & \chi_1(\beta_{\varphi(m)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \chi_{\varphi(m)}(\beta_1) & \ldots & \chi_{\varphi(m)}(\beta_{\varphi(m)}) \end{vmatrix} \tag{7}$$

(χ_1 — главный характер) отличен от нуля.

Действительно, если его умножить на сопряженный транспонированный определитель, то, в силу соотношений ортогональности между характерами,

$$|\Delta|^2 = \Delta\Delta^* = \varphi(m)^{\varphi(m)}. \tag{8}$$

Поэтому система равенств

$$\sum A_{j_\mu \nu} \chi_{j_\mu}(\beta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots \varphi(m), \tag{9}$$

может существовать лишь при всех $A_{j_\mu \nu} = 0$. Противоречие доказывает теорему.

В теореме 2 L-ряд по главному характеру можно заменить $\zeta(s)$ так как они связаны соотношением

$$L(s,\chi_0)=\left(1-\frac{1}{p_1^s}\right)\cdot\cdot\cdot\left(1-\frac{1}{p_\mu^s}\right)\zeta(s).$$

В заключение я приношу глубокую благодарность проф. А. О. Гельфонду за постановку этой задачи, за указания и внимание при ее решении.

Поступило
5 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Д. Мордухай-Болтовской, Изв. политехническ. ин-та, Варшава (1914). [2] A. Ostrowski, Math. Z., 8, 241 (1920). [3] Л. С. Понтрягин, C. R., **196**, 1201 (1933). [4] Д. Д. Мордухай-Болтовской, Tôhoku Math. J., **35**, 19 (1932).