Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

А. ПЛЕСНЕР

СТРОЕНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ГРАФИКА САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 IV 1949)

Линейный оператор A в унитарном пространстве H мы называем самосопряженным, если для всех элементов f и g из области определения Ω_A оператора A справедливо соотношение $(Af, g) = (f, Ag)$. Мы не предполагаем, что линейное многообразие Ω_A плотно в H, и обозначаем через $H^{(0)}$ подпространство элементов, ортогональных к Ω_A.

Совокупность пар $[f, f'] = \hat{f}$, где $f, f' \in H$ образует унитарное пространство $\hat{H} = H \oplus H$ с скалярным произведением $(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g) + (f', g')$. Первой (второй) проекцией ${}^1\Gamma$ (${}^2\Gamma$) множества $\Gamma \subset \hat{H}$ называется совокупность всех первых (вторых) элементов пар, принадлежащих к Γ. Множество Γ_A пар $[f, Af]$ называется графиком оператора A. Множество $\Gamma \subset \hat{H}$ есть тогда и только тогда график линейного оператора, если оно есть линейное многообразие и не содержит элементов вида $[0, h]$ $(h \neq 0)$. Если A не допускает замыкания, то $\overline{\Gamma}_A$ (замыкание Γ_A в $\hat{H}$) содержит элементы вида $[0, e]$, где e пробегает некоторое ненулевое подпространство $\mathfrak{E}$. Если при всех $f \in \Omega_A$

$$(Af, g) = (f, g^*), \tag{1}$$

то пару $[g, g^*]$ назовем сопряженной относительно A или Γ_A. Если в $\hat{H}$ формулой $O[f, f'] = [-f', f]$ определить унитарный оператор O, то условие (1), которое записывается в виде:

$$([-Af, f], [g, g^*]) = 0, \tag{1'}$$

означает ортогональность в $\hat{H}$ сопряженной пары к $O\Gamma_A$.

Сопряженным графиком оператора A мы назовем совокупность Γ_A^* всех сопряженных пар относительно A, так что

$$\hat{H} = O\overline{\Gamma}_A \oplus \Gamma_A^*. \tag{2}$$

$\overline{\Gamma}_A \subset \Gamma_A^*$, так как $[g, Ag] \in \Gamma_A$ есть сопряженная пара. В силу (1) пара $[0, h]$ тогда и только тогда принадлежит Γ_A^*, если $(f, h) = 0$

при $f \in \Omega_A$, т. е. если $h \in H^{(0)}$. Следовательно $\mathfrak{E} \subset H^{(0)}$. Точнее, в силу (2), пара $[-e,\ 0]$ ортогональна к Γ_A^*, т. е.

$$(g,\ e) = 0, \tag{3}$$

если $g \in {}^1\overline{\Gamma}_A^*$ и $e \in \mathfrak{E}$.

Пусть $\mathfrak{P}_\lambda$ — линейное многообразие элементов вида $Af - \lambda f$, где λ — невещественное число, а $\mathfrak{T}_\lambda$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{P}_\lambda$ в H (дефектное подпространство), так что

$$H = \overline{\mathfrak{P}}_\lambda \oplus \mathfrak{T}_\lambda. \tag{4}$$

Лемма 1. *Элемент g тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{T}_\lambda$, если $[g,\ \bar{\lambda} g] \in \Gamma_A^*$.*

Это утверждение следует из тождества:

$$(Af - \lambda f,\ g) + ([-Af,\ f],\ [g,\ \bar{\lambda} g]) = 0.$$

Лемма 2. *Подпространство $\overline{\mathfrak{P}}_\lambda$ состоит в точности из элементов g вида $g = f^* - \lambda f$, где $[f, f^*]$ есть произвольный элемент $\overline{\Gamma}_A$, причем двум различным элементам $f \in {}^1\overline{\Gamma}_A$ отвечают различные элементы $g \in \overline{\mathfrak{P}}_\lambda$.*

Обозначим через T_λ совокупность всех пар $[g_\lambda,\ \bar{\lambda} g_\lambda]$, где $g_\lambda \in \mathfrak{T}_\lambda$. В силу леммы (1) $T_\lambda \subset \Gamma_A^*$.

Теорема 1. *Сопряженный график Γ_A^* есть (при произвольном невещественном λ) прямая сумма (векторных систем) $\overline{\Gamma}_A$, T_λ и $T_{\bar{\lambda}}$:*

$$\Gamma_A^* = \overline{\Gamma}_A + T_\lambda + T_{\bar{\lambda}}. \tag{5}$$

В силу (4) и леммы 2 имеем для $[g,\ g^*] \in \Gamma_A^*$

$$g^* - \lambda g = f^* - \lambda f + (\bar{\lambda} - \lambda) g_\lambda, \tag{6}$$

где $[f,\ f^*] \in \overline{\Gamma}_A$ и $g_\lambda \in \mathfrak{T}_\lambda$, или

$$g^* - f^* - \bar{\lambda} g_\lambda = \lambda(g - f - g_\lambda). \tag{6'}$$

Но пары $[g,\ g^*]$, $[f,\ f^*]$, $[g_\lambda,\ \bar{\lambda} g_\lambda]$ (последняя в силу леммы 1) принадлежат Γ_A^*, а поэтому, если положить $g_{\bar{\lambda}} = g - f - g_\lambda$, то и $[g_{\bar{\lambda}}, \lambda g_{\bar{\lambda}}] \in \Gamma_A^*$, следовательно, согласно лемме 1, $g_{\bar{\lambda}} \in \mathfrak{T}_{\bar{\lambda}}$. Таким образом (ср. (6')),

$$g = f + g_\lambda + g_{\bar{\lambda}}, \quad g^* = f^* + \bar{\lambda} g_\lambda + \lambda g_{\bar{\lambda}}, \tag{5'}$$

где $[f,\ f^*] \in \overline{\Gamma}_A$, $g_\lambda \in \mathfrak{T}_\lambda$, $g_{\bar{\lambda}} \in \mathfrak{T}_{\bar{\lambda}}$.

(5') совпадает с представлением (5), ибо мы покажем, что сумма прямая, т. е. что элементы f, f^*, g_λ, $g_{\bar{\lambda}}$ однозначно определяются парой $[g,\ g^*]$.

Действительно, из (6) следует

$$f^* - \lambda f = P_\lambda (g^* - \lambda g); \quad (\bar{\lambda} - \lambda) g_\lambda = Q_\lambda (g^* - \lambda g), \tag{7}$$

где P_λ и Q_λ суть проекционные операторы подпространств $\mathfrak{P}_\lambda$ и $\mathfrak{T}_\lambda$. Заменой λ на $\bar{\lambda}$ получим соответственно:

$$f^* - \bar{\lambda} f = P_{\bar{\lambda}} (g^* - \bar{\lambda} g); \quad (\lambda - \bar{\lambda}) g_{\bar{\lambda}} = Q_{\bar{\lambda}} (g^* - \bar{\lambda} g). \tag{7'}$$

Уравнения (7) и (7') при заданных g и g^* однозначно определяют элементы f, f^*, g_λ, $g_{\bar{\lambda}}$ представления (5').

Если оператор A плотно задан, т. е. $\bar{\Omega}_A = H$, то второй элемент g^* сопряженной пары $[g, g^*]$ однозначно определяется первым как $g^* = Ag$. Поэтому в этом случае уже для первой проекции ${}^1\Gamma_A^*$ имеет место известное представление

$${}^1\Gamma_A^* = {}^1\bar{\Gamma}_A + \mathfrak{T}_\lambda + \mathfrak{T}_{\bar{\lambda}} \tag{8}$$

в виде прямой суммы ${}^1\bar{\Gamma}_A = \Omega_{\bar{A}}$, $\mathfrak{T}_\lambda$ и $\mathfrak{T}_{\bar{\lambda}}$. Для неплотно заданного оператора (8) не есть разложение в прямую сумму, ибо уравнение

$$f + g_\lambda + g_{\bar{\lambda}} = 0 \tag{9}$$

имеет ненулевые решения ([1]) такие, что

$$f \in {}^1\bar{\Gamma}_A; \quad g_\lambda \in \mathfrak{T}_\lambda; \quad g_{\bar{\lambda}} \in \mathfrak{T}_{\bar{\lambda}}. \tag{10}$$

Пусть $H^{(0)} = \mathfrak{E} + \mathfrak{R}$ есть одно из возможных разложений $H^{(0)}$ в прямую сумму $\mathfrak{E}$ и некоторого линейного многообразия $\mathfrak{R}$.

Теорема 2. *Формулы*

$$g_\lambda = Q_\lambda h; \quad g_{\bar{\lambda}} = -Q_{\bar{\lambda}} h; \quad f = Q_{\bar{\lambda}} h - Q_\lambda h, \tag{11}$$

где h пробегает $\mathfrak{R}$, задают совокупность всех решений уравнения (9), *удовлетворяющих условиям* (10), *причем соответствие между этими решениями и элементами $h \in \mathfrak{R}$ взаимно однозначно.*

Если f, g_λ, $g_{\bar{\lambda}}$ есть искомое решение уравнения (9) и $[f, f'] \in \bar{\Gamma}_A$, то, полагая $(\bar{\lambda} - \lambda) h' = f' + \bar{\lambda} g_\lambda + \lambda g_{\bar{\lambda}}$, имеем $[0, (\bar{\lambda} - \lambda) h'] \in \Gamma_A^*$, т. е. $h' \in H^{(0)}$. Если, далее, $h' = e + h$, где $e \in \mathfrak{E}$, $h \in \mathfrak{R}$ и $f^* = f' - (\bar{\lambda} - \lambda) e$, то $[f, f^*] \in \bar{\Gamma}_A$, $h \in \mathfrak{R}$ и

$$(\bar{\lambda} - \lambda) h = f^* + \bar{\lambda} g_\lambda + \lambda g_{\bar{\lambda}}. \tag{12}$$

Обратно, если $h \in \mathfrak{R}$, то $[0, (\bar{\lambda} - \lambda) h] \in \Gamma_A^*$, и, применяя к этой паре ($g = 0$, $g^* = (\bar{\lambda} - \lambda) h$) представление (5'), получим (9) и (12), т. е. решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям (10), в котором, согласно (7) и (7'), $g_\lambda = Q_\lambda h$ и $g_{\bar{\lambda}} = -Q_{\bar{\lambda}} h$. При этом $h = 0$, если ему отвечает нулевое решение (9).

Действительно, пусть $f = g_\lambda = g_{\bar\lambda} = 0$ и $[f, f^*] = [0, e] \in \bar\Gamma_A$, $e \in \mathfrak{E}$. Тогда, согласно (12), $(\bar\lambda - \lambda)\, h = f^* = e$, так что $h \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{E}$ и, следовательно, $h = 0$.

Пусть $\mathfrak{M}_\lambda = Q_\lambda \mathfrak{K} = Q_\lambda H^{(0)}$ есть проекция $\mathfrak{K}$ или $H^{(0)}$ на дефектное подпространство $\mathfrak{T}_\lambda$.

Отображение $h_\lambda = Q_\lambda h$ многообразия $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{M}_\lambda$ взаимно однозначно.

Покажем сначала, что при $h \in \mathfrak{K}$ $(h \in H^{(0)})$

$$\| Q_\lambda h \| = \| Q_{\bar\lambda} h \| . \tag{13}$$

Действительно, полагая в (7) и (7') $g = 0$ и $g^* = (\bar\lambda - \lambda)\, h$, получим $f^* - \lambda f = (\bar\lambda - \lambda)\, P_\lambda h$, $f^* - \bar\lambda f = (\lambda - \bar\lambda)\, P_{\bar\lambda} h$, и отсюда далее вычислением квадратов норм правых и левых частей этих соотношений $\| P_\lambda h \| = \| P_{\bar\lambda} h \|$. Но $h = P_\lambda h + Q_\lambda h = P_{\bar\lambda} h + Q_{\bar\lambda} h$, так что имеет место и (13). Если теперь $Q_\lambda h = 0$ и $h \in \mathfrak{K}$, то, в силу (13), и $Q_{\bar\lambda} h = 0$, т. е. элементу h отвечает, согласно (11), нулевое решение уравнения (9), и, следовательно, $h = 0$ (теорема 2).

Для элементов $g = h_\lambda \in \mathfrak{M}_\lambda$ определим оператор V_λ формулой:

$$V_\lambda g = V_\lambda h_\lambda = V_\lambda Q_\lambda h = Q_{\bar\lambda} h. \tag{14}$$

V_λ отображает изометрически $\mathfrak{M}_\lambda$ на $\mathfrak{M}_{\bar\lambda}$, и теореме 2 можно придать следующий вид:

Теорема 2' *. *Совокупность всех решений уравнения* (9), *удовлетворяющих условиям* (10), *можно задать формулами*:

$$g_\lambda = h_\lambda \in \mathfrak{M}_\lambda, \quad g_{\bar\lambda} = -V_\lambda h_\lambda, \quad f = V_\lambda h_\lambda - h_\lambda. \tag{15}$$

Поступило
11 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 1, 53 (1940). [2] М. А. Красносельский, ДАН, 59, № 1 (1947).

* Для замкнутого оператора см. ([1]) и ([2]).