Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. Н. ЛЕБЕДЕВ

НЕКОТОРЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ РАЗЛОЖЕНИЯМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 11 II 1949)

Во многих проблемах математической физики важную роль играют формулы типа интеграла Фурье

$$f(x)=\int_0^\infty \omega(\tau)\varphi(x,\tau)\,d\tau\int_a^\infty f(\xi)\varphi(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{1}$$

дающие интегральное разложение произвольной функции $f(x)$, определенной на промежутке (a,∞) и принадлежащей к некоторому классу, в интеграл по заданным функциям $\varphi(x,\tau)$ *. В качестве простых примеров можно указать на косинус- и синус-интеграл Фурье $\left(a=0,\quad \varphi(x,\tau)=\begin{matrix}\cos x\tau\\ \sin x\tau\end{matrix},\quad \omega(\tau)=\frac{2}{\pi}\right)$, разложение Ханкеля $(a=0$, $\varphi(x,\tau)=\sqrt{x\tau}\,J_\nu(x\tau)$, $\omega(\tau)=1)$ и т. д.

Общее исследование разложений рассматриваемого типа с точки зрения теории интегральных уравнений выполнено в работах Вейля ([1]), Карлемана ([2]), Хислопа ([3]) и др. В этих работах разложение (1) рассматривается как интегральный аналог теоремы разложения для сингулярного интегрального уравнения

$$\varphi(x,\tau)=\mu(\tau)\int_a^\infty K(x,s)\varphi(s,\tau)\,ds \tag{2}$$

со сплошным спектром $(0,\infty)$. Интегральные уравнения этого вида построены для ряда разложений типа (1).

Целью настоящей работы является вывод соответствующих уравнений для двух менее известных разложений, встречающихся в математической физике, именно для разложения Мелера — Фока ([4,5])

$$f(x)=\int_0^\infty \tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,d\tau\int_1^\infty f(\xi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\,d\xi \tag{3}$$

$\Bigl(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$ — сферическая функция Лежандра с комплексным значком $\nu=-\frac{1}{2}+i\tau\Bigr)$ и разложения, принадлежащего автору ([6]):

$$f(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\,\frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}\,d\tau\int_0^\infty f(\xi)\frac{K_{i\tau}(\xi)}{\sqrt{\xi}}\,d\xi \tag{4}$$

($K_{i\tau}(x)$ — цилиндрическая функция Макдональда).

* Множитель $\omega(\tau)$ введен для удобства записи формул и может быть устранен подстановкой $\sqrt{\omega(\tau)}\,\varphi(x,\tau)=\psi(x,\tau)$.

Первое из этих разложений (3) справедливо для произвольной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям:

I. $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком конечном промежутке (a, b), $1 < a < b$.

II. $f(x)x^{-\frac{1}{2}} \in L(1, \infty)$.

Второе разложение (4) верно для функции, удовлетворяющей условиям*:

III. $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию в любом конечном промежутке (a, b), $0 < a < b$.

IV. $f(x)\frac{\lg x}{\sqrt{x}} \in L\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $f(x) \in L\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Оба разложения сохраняют силу также и для не непрерывных функций, если в точках разрыва заменить левую часть равенств (3) — (4) полусуммой $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

Для каждого из разложений (3) — (4) можно указать интегральное уравнение типа (2) с ядром очень простого вида, именно:

$$\frac{\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi}\int_1^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(s)}{x+s}\,ds = P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x), \tag{5}$$

$$\frac{\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-(x+s)}}{x+s}\,\frac{K_{i\tau}(s)}{\sqrt{s}}\,ds = \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}. \tag{6}$$

Мы дадим прямое доказательство справедливости этих соотношений. На основании ([7]), стр. 270, формула 141, и стр. 272, формула 144, имеем:

$$\frac{\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi}\int_1^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(s)}{x+s}\,ds = \frac{2\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\alpha}{x+\operatorname{ch}\alpha}\,d\alpha\int_0^\alpha \frac{\cos\tau u}{\sqrt{2\operatorname{ch}\alpha-2\operatorname{ch}u}}\,du =$$

$$= \frac{2\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi^2}\int_0^\infty \cos\tau u\,du\int_u^\infty \frac{\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha}{(x+\operatorname{ch}\alpha)\sqrt{2\operatorname{ch}\alpha-2\operatorname{ch}u}} =$$

$$= \frac{2\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\tau u}{\sqrt{2x+2\operatorname{ch}u}}\,du = P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x).$$

Законность перестановки порядка интегрирования вытекает из абсолютной сходимости рассматриваемых интегралов.

Доказательство второго равенства (6) является несколько более сложным.

Принимая во внимание ([8]), стр. 388, формула 7, ([7]), стр. 270, формула 141, и ([8]), стр. 181, формула 5, находим:

$$\frac{\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-(x+s)}}{x+s}\,\frac{K_{i\tau}(s)}{\sqrt{s}}\,ds = \frac{\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_{i\tau}(s)}{\sqrt{s}}\,ds\int_1^\infty e^{-(x+s)t}\,dt =$$

$$= \frac{\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi}\int_1^\infty e^{-xt}dt\int_0^\infty \frac{K_{i\tau}(s)}{\sqrt{s}}\,e^{-st}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_1^\infty e^{-xt}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(t)\,dt =$$

---

* В такой форме эти условия публикуются впервые, в работе ([5]) теорема (4) доказана при значительно больших ограничениях.

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \alpha} \operatorname{sh} \alpha d\alpha \int_0^\alpha \frac{\cos \tau u}{\sqrt{2\operatorname{ch} \alpha - 2\operatorname{ch} u}} du =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos \tau u \, du \int_u^\infty e^{-x \operatorname{ch} \alpha} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\sqrt{2\operatorname{ch} \alpha - 2\operatorname{ch} u}} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} u} \cos \tau u \, du = \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} .$$

Перемена порядка интегрирования легко оправдывается абсолютной сходимостью, следующей из оценки $|K_{i\tau}(x)| \leqslant K_0(x)$.

Пользуясь найденными соотношениями (5) — (6), можно получить решение неоднородных интегральных уравнений

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_1^\infty \frac{f(s)}{x+s} ds \quad (1 < x < \infty), \tag{7}$$

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^\infty \frac{e^{-(x+s)}}{x+s} f(s) ds \quad (0 < x < \infty), \tag{8}$$

где $g(x)$ — заданная функция, λ — параметр, удовлетворяющий условию $-\infty < \lambda\pi < 1$.

Рассмотрим, например, уравнение (8). Решение этого уравнения может быть найдено с помощью интегрального преобразования

$$\int_0^\infty f(x) \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} dx = F(\tau) \quad (0 \leqslant \tau < \infty). \tag{9}$$

Умножая (8) на $\frac{1}{\sqrt{x}} K_{i\tau}(x)$, интегрируя по промежутку $(0, \infty)$ и принимая во внимание (6), получаем

$$F(\tau) = G(\tau) + \frac{\lambda\pi}{\operatorname{ch} \pi\tau} F(\tau), \qquad F(\tau) = \frac{G(\tau)}{1 - \frac{\lambda\pi}{\operatorname{ch} \pi\tau}}, \tag{10}$$

где $G(\tau)$ — интегральное преобразование типа (9) от функции $g(x)$.

Формальное решение дается теперь формулой обращения

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi\tau F(\tau) \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} d\tau = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{sh} \pi\tau G(\tau)}{1 - \frac{\lambda\pi}{\operatorname{ch} \pi\tau}} \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} d\tau, \tag{11}$$

следующей из разложения (4).

Простые достаточные условия, при выполнении которых (11) представляет искомое решение, доставляются теоремой:

Теорема. *Пусть $g(x)$ удовлетворяет условиям*:

I. *$g(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком конечном промежутке (a, b), $0 < a < b$.*

II. $g(x) x^{-\frac{3}{4}} \in L(0, 1)$; $g(x) \in L(1, \infty)$.

III. $G(\tau) \tau e^{\frac{\pi\tau}{2}} \in L(0, \infty)$.

Тогда интеграл (11) *существует и представляет непрерывное на* (a, b) *решение уравнения* (8).

Доказательство основывается на оценке *

$$|K_{i\tau}(x)| \leqslant \frac{A}{\sqrt{\operatorname{sh}\pi\tau}}\, x^{-\frac{1}{4}} \tag{12}$$

(A — абсолютная постоянная), вытекающей из интегрального представления

$$K_{i\tau}^2(x) = \frac{\pi}{2\operatorname{sh}\pi\tau}\int_0^\infty J_0\left(2x\operatorname{sh}\frac{s}{2}\right)\sin\tau s\, ds. \tag{13}$$

Из этой оценки следует абсолютная сходимость (11) и непрерывность $f(x)$ на (a, b) при $-\infty < \lambda\pi < 1$. Подставляя $f(x)$ в интеграл (8) и принимая во внимание абсолютную сходимость всех повторных интегралов, имеем:

$$\lambda\int_0^\infty \frac{e^{-(x+s)}}{x+s} f(s)\,ds = \lambda\int_0^\infty \frac{e^{-(x+s)}}{x+s}\,ds\cdot\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\tau\operatorname{sh}\pi\tau G(\tau)}{1-\frac{\lambda\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau}}\,\frac{K_{i\tau}(s)}{\sqrt{s}}\,d\tau =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\lambda\pi\,\tau\operatorname{sh}\pi\tau G(\tau)}{\left(1-\frac{\lambda\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau}\right)\operatorname{ch}\pi\tau}\,\frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}\,d\tau = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\tau\operatorname{sh}\pi\tau}{1-\frac{\lambda\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau}}\,G(\tau)\,\frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}\,d\tau -$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}\pi\tau G(\tau)\frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}\,d\tau = f(x) - g(x), \quad x\in(a, b),$$

так как условия применимости теоремы обращения соблюдены.

Пример.

$$g(x) = e^{-x}, \quad G(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\pi\tau}, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\,K_\nu(x),$$

$$\nu = \begin{cases} 1-\frac{1}{\pi}\arccos\lambda\pi, & -1\leqslant\lambda\pi<1; \\ \frac{i}{\pi}\operatorname{ar\,ch}(-\lambda\pi), & -\infty<\lambda\pi\leqslant -1. \end{cases}$$

Решение уравнения (7) может быть получено аналогичным образом с помощью преобразования Мелера

$$\int_1^\infty f(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,dx = \Phi(\tau). \tag{14}$$

Ленинградский физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступило
7 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Math. Ann., **66**, 273 (1909). [2] T. Carleman, Sur les equations integrales singulières à noyau reel et symetrique, Uppsala, 1923. [3] J. Hyslop, Proc. Cambr. Phil. Soc., **22**, 169 (1924). [4] F. G. Mehler, Math. Ann., **18** (1881). [5] В. А. Фок, ДАН, **39**, 279 (1943). [6] Н. Н. Лебедев, ДАН, **52**, 661 (1946). [7] E. W. Hobson, The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge, 1931. [8] G. H. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922.

* Если применить более точную оценку, получающуюся из (13) в результате довольно тонких соображений, то условие III можно заменить более слабым условием $G(\tau)\,\tau^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{\pi\tau}{2}}\in L(0, \infty)$.