Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 IV 1949)

Цель заметки — показать, что теория интегрирования линейного уравнения с переменными коэффициентами, развернутая автором ([1], [2]), остается справедливой для нахождения характеристических чисел и фундаментальных функций краевых задач, встречающихся в исследовании вопросов физики.

Мы ограничимся здесь только тем, что в общих чертах изложим наш метод для однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка, содержащего линейно параметр λ. Искомое решение подчиним граничным условиям линейной формы от $y^{(k)}(0)$ и $y^{(k)}(l)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$.

Примем, что коэффициенты данного дифференциального уравнения непрерывны в замкнутом промежутке $(0, l)$ или имеют в этом промежутке конечное число разрывов первого рода.

Подобно тому как было показано в работах ([1], [2]), мы получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода со свободным членом $\varphi(x)$, зависящим линейно от n параметров $y^{(k)}(0)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, некоторые из параметров могут быть заданы.

Применяя метод последовательных приближений, мы придем к решению полученного интегрального уравнения, равномерно сходящемуся в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$ для всех конечных значений λ и $y^{(k)}(0)$. Оно будет линейной комбинацией параметров $y^{(k)}(0)$ с коэффициентами, содержащими λ. Поэтому, вычислив производные $y^{(k)}(l)$ и использовав граничные условия, мы получим линейные алгебраические уравнения относительно неизвестных величин $y^{(k)}(0)$ и $y^{(k)}(l)$.

Будем рассматривать эти уравнения как систему для определения неизвестных $y^{(k)}(0)$ и $y^{(k)}(l)$. Условие совместимости всех, а иногда группы полученных уравнений нас приведет к характеристическому уравнению.

Заметим тут же, что наши рассуждения сохраняют смысл и изложенный метод дает характеристическое уравнение и в том случае, когда функция $\varphi(x)$ неограничена в промежутке $(0, l)$, если только

$$\int_0^l |\varphi(x)|\, dx$$ имеет конечное значение.

В статье ([3]) Флорин Василеско приводит отыскание критической силы прямого стержня, сжатого в направлении своей оси, к решению интегрального уравнения Вольтерра; впрочем, он ограничивается случаем продольно сжатого стержня с обоими опертыми концами. Его рассуждения пригодны для решения лишь незначительного числа задач теории упругости. Легко видеть, что результат Флорина Василеско может быть получен в качестве простого следствия нашего результата [1].

Перейдем теперь к применению нашего метода к решению конкретных задач о колебании тел и к задачам устойчивости равновесия.

Интегрирование дифференциального уравнения поперечных колебаний струны переменной плотности приводится к интегрированию уравнения

$$v'' + \frac{p^2}{H}\rho(x)\,v(x) = 0, \tag{1}$$

где $\rho(x)$ — плотность в сечении x, H — постоянное натяжение, p — частота колебаний.

Для струны, закрепленной в точках $x=0$ и $x=l$, решение $v(x)$ дифференциального уравнения (1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(x) = xv'(0) - \frac{p^2}{H}\int_0^x (x-t)\,\rho(t)\,v(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$p = \frac{\lambda}{l}\sqrt{H},$$

где λ — один из корней уравнения:

$$0 = 1 - \lambda^2\int_0^1 (1-u)\,u\rho(lu)\,du +$$

$$+ \lambda^4\int_0^1 (1-u)\,\rho(lu)\,du\int_0^u (u-u_1)\,u_1\rho(lu_1)\,du_1 - \ldots$$

В случае плотности, изменяющейся по линейному закону

$$\rho(x) = \rho_1\frac{x}{l},$$

получим для определения λ уравнение $\left(\text{теперь уже } p = \frac{\lambda}{l}\sqrt{\frac{H}{\rho_1}}\right)$

$$0 = 1 - \frac{\lambda^2}{3\cdot 4} + \frac{\lambda^4}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \frac{\lambda^6}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10} + \cdots,$$

наименьший положительный корень которого равен 4,35.

Рассмотрим продольный изгиб стержня, находящегося под действием осевой нагрузки $q(x)$, предполагая нижний конец защемленным, а верхний свободным. Здесь x — расстояние от верхнего конца стержня. Предположим, что $J(x)$ — закон изменения момента инерции поперечного сечения стержня.

Дифференциальное уравнение упругой линии такого стержня

$$(EJ(x)\,y''(x))' = -S(x)\,y'(x),$$

где E — модуль упругости, а

$$S(x) = \int_0^x q(t)\,dt,$$

с граничными условиями $y''(0)=0$, $y(l)=y'(l)=0$, приводится к интегральному уравнению:

$$y'(x)=y'(0)-\int_0^x \frac{dx}{EJ(x)}\int_0^x S(x)\,y'(x)\,dx.$$

Если момент инерции стержня меняется вдоль оси стержня по формуле

$$J(x)=J_1\left(\frac{x}{l}\right)^m$$

и если осевая нагрузка в точке x выражается формулой

$$q(x)=q_1\left(\frac{x}{l}\right)^n,$$

то значения q_1, обращающие в нуль $y'(l)$, будут:

$$q_1=\lambda\frac{EJ_1}{l^3},$$

где λ — один из корней уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}\lambda^\nu}{(n+1)^\nu\prod\limits_{r=1}^{\nu}[r(n-m+3)][r(n-m+3)+m-1]}=1$$

$$(n\geqslant 0;\ n+2-m\geqslant 0).$$

Для стержня постоянной жесткости EJ и с осевой нагрузкой, изменяющейся по линейному закону, получается следующее уравнение

$$0=1-\frac{\lambda}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\lambda^2}{2^2\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}-\frac{\lambda^3}{2^3\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}+\ldots,$$

наименьший корень которого равен 32,20.

Определение частот свободного колебания стержня, как известно, приводится к нахождению характеристических чисел дифференциального уравнения

$$(\mu y'')''-p^2\rho y=0.$$

Рассмотрим стержень со свободным левым концом и защемленным горизонтально правым концом. Поместим начало координат в свободном конце стержня. Пусть функции μ и ρ равны

$$\mu=hx^3,\qquad \rho=kx,$$

где h и k — некоторые постоянные.

Вычисление показывает, что

$$p=\sqrt{\frac{hS}{kl^4}},$$

где S — один из корней уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^n}{(2n)!\,(2n+1)!}\left(1+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{n+1}}{(2n+2)!\,(2n+4)!}\right)=$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^n}{(2n+1)!\,(2n+2)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{n+1}}{(2n+1)!\,(2n+3)!},$$

а l — длина стержня.

Наконец, рассмотрим еще одну, несколько своеобразную задачу, к исследованию которой также применима наша теория. Пусть балка покоится на упругом основании с постоянным погонным коэффициентом постели k. Левый конец балки будем предполагать свободным, правый—опертым на жесткой неподвижной опоре. Определим длину балки l, нагруженной на правом конце сосредоточенным моментом, так, чтобы не происходило оседание свободного конца.

Интегральное уравнение, которое для этой балки приходится решать, имеет вид

$$M(x) = \frac{x^3}{6} M'''(0) - \frac{k}{6E} \int_0^x (x-t)^3 \frac{M(t)}{J(t)} dt,$$

где $M(x)$ — изгибающий момент на расстоянии x от свободного конца балки, а $EJ(x)$ — переменная жесткость.

В качестве конкретного примера рассмотрим балку с моментом инерции $J(x) = J_1 x^{-1}$, где J_1 — момент инерции в сечении $x = 1$.

Вычисление показывает, что

$$l = \lambda \sqrt[5]{\frac{EJ_1}{k}},$$

где λ — наименьший корень уравнения

$$1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdots (5\nu + 4)}{(5\nu + 6)!} \lambda^{5(\nu+1)}.$$

При $E = 142\,538\,522 \cdot 10^4$ кг/см² и $k = 1400$ кг/см² находим, что $l = 180$ см.

Поступило
8 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Е. Микеладзе, ДАН, 52, № 9 (1946). [2] Ш. Е. Микеладзе, Некоторые задачи строительной механики, 1948. [3] Florin Vasilesco, C. R., **225**, 17, 716 (1947).