Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 5

ГИДРАВЛИКА

Член-корреспондент АН СССР В. В. СОКОЛОВСКИЙ

ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В основе теории фильтрации грунтовых вод лежит закон фильтрации, устанавливающий зависимость между величиной скорости фильтрации v и гидравлическим уклоном I, которую будем записывать в виде

$$I = \Phi(v), \tag{1}$$

причем функция $\Phi(v)$ характеризует фильтрационные свойства грунта.

Для мелкозернистых песков зависимость (1) линейна и носит название закона Дарси

$$I = \frac{v}{k}. \tag{2}$$

Для крупнозернистых песков зависимость (1) нелинейна, и установлению ее вида посвящен ряд экспериментальных исследований, приведенных в монографии Л. С. Лейбензона (1).

Отметим также, что весьма интересные экспериментальные результаты получены в последнее время А. М. Сенковым.

В дальнейшем мы будем рассматривать плоское движение, при этом условимся за ось x принимать горизонтальную, а за ось y — вертикальную прямые.

Напомним, что напором называется величина

$$H = \frac{p}{\rho g} + y,$$

причем p — давление, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести.

Между напором H, гидравлическим уклоном I принимается зависимость

$$\operatorname{grad} H = -I\frac{\mathbf{v}}{v} = -\Phi(v)\frac{\mathbf{v}}{v},$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости фильтрации.

Эта зависимость может быть заменена равенствами

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -I\frac{v_x}{v} = -\Phi(v)\frac{v_x}{v}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -I\frac{v_y}{v} = -\Phi(v)\frac{v_y}{v}, \tag{3}$$

где v_x и v_y — компоненты скорости фильтрации по осям x и y.

При постоянной плотности ρ уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Отсюда вытекает, что компоненты скорости v_x, v_y могут быть выражены через функцию тока ψ:

$$v_x = +\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{4}$$

Таким образом, плоское установившееся движение грунтовых вод на основании равенств (3) и (4) описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = kv_x\frac{\Phi(v)}{v}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = kv_y\frac{\Phi(v)}{v}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -v_y, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = +v_x, \tag{5}$$

где обозначено $\varphi = -kH$, подробно изученной С. А. Христиановичем [2] для произвольной функции $\Phi(v)$.

Ниже будет показано, что система уравнений (5) может быть приведена к весьма простой форме для функции $\Phi(v)$ следующего вида:

$$\Phi(v) = \frac{v}{k\sqrt{1-\left(\frac{v}{m}\right)^2}} \quad (0 \leqslant v \leqslant m), \tag{6}$$

причем постоянные k и m имеют размерности скорости.

Функция (6) в некотором интервале изменения $0 \leqslant v \leqslant v_*$ $(v_* < m)$ дает возможность получить достаточное приближение при обработке экспериментальных данных.

Заметим, что при $m = \infty$ функция (6) принимает вид

$$\Phi(v) = \frac{v}{k} \quad (0 \leqslant v \leqslant \infty),$$

а зависимость (1) переходит в закон Дарси (2).

Введем вместо v_x, v_y новые переменные

$$v_x = v\cos\theta, \qquad v_y = v\sin\theta, \tag{7}$$

где θ — угол, который вектор скорости образует с положительным направлением оси x.

Заменяя v_x, v_y на v, θ и подставляя вместо $\Phi(v)$ ее выражение (6), получим:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{v\cos\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{m}\right)^2}}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{v\sin\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{m}\right)^2}}, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v\sin\theta, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = +v\cos\theta. \end{aligned} \tag{8}$$

Наряду с v, будем пользоваться новой величиной w:

$$w = \frac{2v}{1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{m}\right)^2}}, \quad v = \frac{w}{1+\left(\frac{w}{2m}\right)^2} \quad (0 \leqslant w \leqslant 2m). \tag{9}$$

Заметим, что при $m = \infty$ уравнения (8) переходят в известные уравнения линейной фильтрации, а формулы (9) дают

$$w = v.$$

Будем также применять безразмерные величины

$$V=\frac{v}{k},\quad W=\frac{w}{k},\quad \mu=\left(\frac{k}{2m}\right)^2.$$

Уравнения (8) на основании формул (9) будут:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{kW}{1-\mu W^2}\cos\theta,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{kW}{1-\mu W^2}\sin\theta,\\ -\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{kW}{1+\mu W^2}\sin\theta,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{kW}{1+\mu W^2}\cos\theta.\end{gathered}\tag{10}$$

Произведем замену переменных, принимая за независимые переменные φ и ψ, а за искомые функции x и y.

Формулы преобразования будут:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial\psi},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial\psi},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial\varphi},$$

где через Δ обозначен определитель преобразования:

$$\Delta=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\frac{1-\mu W^2}{k^2W^2}.$$

После указанной замены переменных уравнения (10) примут вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{1-\mu W^2}{kW}\cos\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=\frac{1-\mu W^2}{kW}\sin\theta,\\ -\frac{\partial x}{\partial\psi}=\frac{1+\mu W^2}{kW}\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\psi}=\frac{1+\mu W^2}{kW}\cos\theta.\end{gathered}\tag{11}$$

Введем комплексные величины

$$z=x+iy,\quad \chi=\varphi+i\psi,\quad \omega=-\ln W+i\theta$$

и сопряженные величины

$$\bar z=x-iy,\quad \bar\chi=\varphi-i\psi,\quad \bar\omega=-\ln W-i\theta.$$

Уравнения (11) могут быть переписаны так:

$$k\frac{\partial z}{\partial\chi}=\exp(\omega),\quad k\frac{\partial z}{\partial\bar\chi}=-\mu\exp(-\bar\omega).\tag{12}$$

Отсюда, после исключения z, получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar\chi}=\mu W^2\frac{\partial\bar\omega}{\partial\chi}.$$

Вследствие того, что комплексные величины $\frac{\partial\omega}{\partial\bar\chi}$ и $\frac{\partial\bar\omega}{\partial\chi}$ сопряжены, а переменная величина μW^2 вещественна и изменяется в пределах $0\leqslant\mu W^2<1$, имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar\chi}=0.$$

Это равенство устанавливает, что комплексная величина ω есть аналитическая функция f лишь от комплексного переменного χ

$$\omega = f(\chi). \tag{13}$$

Кроме того, на основании уравнений (12), имеем

$$k\, dz = \exp(\omega)\, d\chi - \mu \exp(-\bar{\omega})\, d\bar{\chi}. \tag{14}$$

Формула (13) дает

$$-\ln W + i\theta = f(\chi), \tag{15}$$

а формула (14) может быть представлена в виде

$$k\, dz = \exp[f(\chi)]\, d\chi - \mu \exp[-\bar{f}(\bar{\chi})]\, d\bar{\chi}. \tag{16}$$

Заметим, что при $\mu = 0$ ($m = \infty$), когда имеет место линейная фильтрация, $W = V$, а формулы (15) и (16) перепишутся следующим образом

$$-\ln V + i\theta = f(\chi), \quad \frac{d\chi}{dz} = k \exp[f(\chi)]\, d\chi = kV \exp(-i\theta).$$

Здесь величина χ является комплексным потенциалом.

Приведенные уравнения дают возможность решать различные плоские задачи о нелинейной фильтрации грунтовых вод.

Институт механики
Академии наук СССР

Поступило
14 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, Движение природных жидкостей и газов в пористой среде, 1947. [2] С. А. Христианович, Прикладн. матем. и мех., 4, № 1 (1940).