Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

В. М. КУРОЧКИН

КОЛЬЦА С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ИДЕАЛОВ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 1 IV 1949)

Известно, какую роль играют тела в теории простых колец, особенно в теории простых колец с минимальным правым идеалом. Аналогия, которая существует между телами и радикальными кольцами (см. [1]), позволяет надеяться на подобную же роль последних в теории некоторых классов присоединенно-простых колец. Так, доказываемая ниже теорема 2 аналогична теореме Wedderburn'a — Noether о простых кольцах с условием минимальности.

Присоединенным правым идеалом кольца $\mathfrak{A}$ называется такое множество I его элементов, что

1) из $a, b, c \in I$ следует $a+b-c \in I$;

2) из $a \in I$, $x \in \mathfrak{A}$ следует $a \circ x = a + x - ax \in I$.

Лемма 1. *Пусть кольцо $\mathfrak{A}$ гомоморфно отображается на кольцо $\bar{\mathfrak{A}}$ и пусть $\bar{I}$—присоединенный идеал кольца $\bar{\mathfrak{A}}$. Полный прообраз I множества $\bar{I}$ будет присоединенным идеалом кольца $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Обозначим рассматриваемый гомоморфизм через φ. Если $a, b, c \in I$, то $\varphi(a+b-c) = \varphi(a) + \varphi(b) - \varphi(c)$ лежит в $\bar{I}$, так как $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ и $\varphi(c)$ лежат в $\bar{I}$; следовательно, $a+b-c \in I$. Если $a \in I$, $x \in \mathfrak{A}$, то $\varphi(a \circ x) = \varphi(a) \circ \varphi(x) \in \bar{I}$, так как $\varphi(a) \in \bar{I}$; следовательно, $a \circ x \in I$.

Следствие. Если кольцо $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию минимальности для присоединенных правых идеалов, то и любой гомоморфный образ его также удовлетворяет этому условию.

Следует отметить, что кольцо может не удовлетворять условию минимальности для присоединенных правых идеалов, хотя некоторый его идеал и фактор-кольцо по этому идеалу условию минимальности для присоединенных правых идеалов удовлетворяют.

Лемма 2. *Если $\mathfrak{P}$ — некоторое кольцо эндоморфизмов абелевой группы $\mathfrak{G}$, то совокупность I элементов из $\mathfrak{P}$, оставляющих инвариантными все элементы некоторого подмножества $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{G}$, будет присоединенным правым идеалом кольца $\mathfrak{P}$.*

Действительно, если $a, b, c \in I$, $x \in \mathfrak{P}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, то

$$\alpha(a+b-c) = \alpha a + \alpha b - \alpha c = \alpha + \alpha - \alpha = \alpha,$$

$$\alpha(a \circ x) = \alpha(a + x - ax) = \alpha a + \alpha x - (\alpha a)x = \alpha + \alpha x - \alpha x = \alpha.$$

Лемма 3. *Если $\mathfrak{P}$ — плотное кольцо линейных преобразований модуля $\mathfrak{M}$ бесконечного ранга над телом $\mathfrak{K}$* (см., например, [2]), *то*

$\mathfrak{P}$ *не удовлетворяет условию минимальности для присоединенных правых идеалов.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — бесконечная линейно независимая над $\mathfrak{K}$ система элементов модуля $\mathfrak{M}$. Обозначим через I_n присоединенный правый идеал, состоящий из элементов кольца $\mathfrak{P}$, оставляющих инвариантными элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Очевидно, что $I_1 \supset I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ Но, кроме того, везде имеет место строгое включение: так как кольцо $\mathfrak{P}$ плотно, то в $\mathfrak{P}$ существует такой элемент a, что $\alpha_i a = \alpha_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha_{n+1} a = 0$; тогда $a \in I_n$, но a не принадлежит I_{n+1}.

Теорема 1. *Полупростое кольцо $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для присоединенных правых идеалов удовлетворяет и условию минимальности для обычных правых идеалов.*

Доказательство. В полупростом кольце $\mathfrak{A}$ (см. ([3])) существует такая система двусторонних идеалов $\mathfrak{B}_\tau$, что $\bigcap \mathfrak{B}_\tau = (0)$ и все фактор-кольца $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{P}_\tau$ примитивны. По следствию из леммы 1, вместе с $\mathfrak{A}$ все кольца $\mathfrak{P}_\tau$ удовлетворяют условию минимальности для присоединенных правых идеалов. По лемме 3, все эти примитивные кольца $\mathfrak{P}_\tau$, так как они являются плотными кольцами линейных преобразований, действуют в конечных модулях и, следовательно, являются простыми кольцами с условием минимальности для правых идеалов.

Выберем из числа всех $\mathfrak{B}_\tau$ такое (счетное, если возможно) множество идеалов $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$, что все пересечения $\mathfrak{C}_n = \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{B}_n$ различны. В кольце $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A} / \mathfrak{C}_n$ система идеалов $\mathfrak{B}_i / \mathfrak{C}_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, обладает нулевым пересечением, а фактор-кольца по этим идеалам примитивны; следовательно (см. ([3])), кольцо $\mathfrak{A}_n$ полупросто. Докажем, что все кольца $\mathfrak{A}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию минимальности для обычных идеалов.

Кольцо $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} / \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{P}_1$ удовлетворяет этому условию, как указано выше. Пусть это уже доказано для $\mathfrak{A}_{n-1}$. Кольцо

$$\mathfrak{A}_n \Big/ \mathfrak{B}_n / \mathfrak{C}_n = \mathfrak{A}_n / \mathfrak{C}_n \Big/ \mathfrak{B}_n / \mathfrak{C}_n \cong \mathfrak{A} / \mathfrak{B}_n = \mathfrak{P}_n$$

удовлетворяет условию минимальности. С другой стороны,

$$\mathfrak{B}_n / \mathfrak{C}_n = \mathfrak{B}_n / \mathfrak{C}_{n-1} \cap \mathfrak{B}_n \cong \mathfrak{B}_n \cup \mathfrak{C}_{n-1} / \mathfrak{C}_{n-1} \subseteq \mathfrak{A} / \mathfrak{C}_{n-1} = \mathfrak{A}_{n-1},$$

как идеал вполне приводимого кольца $\mathfrak{A}_{n-1}$, тоже ему удовлетворяет. Поэтому и само кольцо $\mathfrak{A}_n$ удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов.

Если число выбранных $\mathfrak{B}_i$ конечно, т. е. если некоторое $\mathfrak{C}_n = (0)$, то $\mathfrak{A} (= \mathfrak{A}_n)$ удовлетворяет условию минимальности. Пусть все $\mathfrak{C}_n$ отличны от нуля. Кольца $\mathfrak{A}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, содержат единицу e_n. Обозначим через $\mathfrak{E}_n$ ее прообраз в кольце $\mathfrak{A}$. Известно ([1]), что $\mathfrak{E}_n$ — присоединенный двусторонний идеал. Так как все $\mathfrak{C}_n$ различны, то различны и $\mathfrak{E}_n$, причем они образуют бесконечную убывающую последовательность присоединенных идеалов: если ε_n — представитель смежного класса e_n при гомоморфизме $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A} / \mathfrak{C}_n$, то $\mathfrak{E}_n = \varepsilon_n + \mathfrak{C}_n$ и $\mathfrak{E}_{n-1} = \varepsilon_n + \mathfrak{C}_{n-1}$, так как ε_n является представителем и смежного класса e_{n-1} при гомоморфизме $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_{n-1}$, т. е. $\mathfrak{E}_n \supset \mathfrak{E}_{n-1}$. Мы пришли к противоречию и, следовательно, теорема доказана.

Следствие. Если кольцо $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию минимальности для присоединенных правых идеалов, то фактор-кольцо $\mathfrak{A} / \mathfrak{R}$ кольца $\mathfrak{A}$ по его радикалу $\mathfrak{R}$ (в смысле Джекобсона ([3])) удовлетворяет условию минимальности для обычных идеалов.

Кольцо называется присоединенно-простым, если оно не имеет присоединенных двусторонних идеалов. Присоединенно-простые кольца совпадают с кольцами, радикальными в смысле Brown'a и McCoy'я ([4]); действительно, как следует из теорем 1 и 6 ([4]), радикал в смысле Brown'a и McCoy'я обладает тем свойством, что фактор-кольцо по нему разлагается в подпрямую сумму простых колец с единицей, т. е. у него существуют гомоморфные отображения на кольца с единицей. Следовательно, если кольцо не совпадает с радикалом, то оно не присоединенно-просто.

Обратное следует из того, что всякое кольцо с единицей можно гомоморфно отобразить на простое кольцо с единицей.

Теорема 2. *Кольцо $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для присоединенных правых идеалов присоединенно-просто тогда и только тогда, если оно радикально.*

Радикальное кольцо присоединенно-просто, так как относительно операции $a \circ b$ оно образует группу. Если же кольцо $\mathfrak{A}$ не радикально, то, ввиду указанного выше следствия, существуют гомоморфные отображения его на простые кольца с условием минимальности (на примитивные компоненты его фактор-кольца по радикалу), т. е. на кольца с единицей, а тогда $\mathfrak{A}$ не присоединенно-простое.

Поступило
1 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Андрунакиевич, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, 129 (1948). [2] N. Jacobson, Trans. Am. Math. Soc., 57, 228 (1945). [3] N. Jacobson, Am. J. Math., 67, 300 (1945). [4] B. Brown and H. McCoy, Am. J. Math., 69, 46 (1947).