Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 5

МЕХАНИКА

И. С. АРЖАНЫХ

ВИХРЕВОЙ ПРИНЦИП АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 3 I 1949)

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dp_\nu = P_\nu(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\, dt,$$
$$dq_\nu = Q_\nu(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n), \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{1}$$

инвариантно (относительно контактных преобразований ([1])) связана с билинейной кососимметричной формой

$$\omega(\delta, d) \equiv \sum_\nu (\delta p_\nu dq_\nu - dp_\nu \delta q_\nu), \tag{2}$$

в которой символ d изображает бесконечно малое изменение вдоль траектории, δ — возможное ($\delta t = 0$), вообще не совпадающее с действительным. Форма ω/dt в силу уравнений (1) обращается в линейную:

$$\sum_\nu (Q_\nu \delta p_\nu - P_\nu \delta q_\nu) = \delta H + \sum_\rho^{1, r} F_\rho \delta H_\rho. \tag{3}$$

Сопоставление (2) и (3)

$$\left(\delta H + \sum_\rho F_\rho \delta H_\rho\right) dt = \sum_\nu (\delta p_\nu dq_\nu - dp_\nu \delta q_\nu) \tag{4}$$

позволяет представить систему (1) в каноническом (ранга r) виде:

$$dp_\nu + \left(\frac{\partial H}{\partial q_\nu} + \sum_\rho F_\rho \frac{\partial H_\rho}{\partial q_\nu}\right) dt = 0,$$
$$dq_\nu - \left(\frac{\partial H}{\partial p_\nu} + \sum_\rho F_\rho \frac{\partial H_\rho}{\partial p_\nu}\right) dt = 0, \quad \nu = \overline{1, n}. \tag{*}$$

Каноническая форма системы (1) инвариантна относительно преобразований:

$$W_\sigma(t, q_1, \ldots, q_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \qquad \sigma = \overline{1, s},$$
$$p_\nu = \frac{\partial W}{\partial q_\nu} + \sum_\sigma \Lambda_\sigma \frac{\partial W_\sigma}{\partial q_\nu}, \quad -\eta_\nu = \frac{\partial W}{\partial \xi_\nu} + \sum_\sigma \Lambda_\sigma \frac{\partial W_\sigma}{\partial \xi_\nu}, \quad \nu = \overline{1, n}. \tag{5}$$

В самом деле, в силу преобразований (5) имеем:

$$\delta W = \sum_\nu (p_\nu \delta q_\nu - \eta_\nu \delta \xi_\nu),$$
$$dW = \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_\sigma \Lambda_\sigma \frac{\partial W_\sigma}{\partial t}\right) dt + \sum_\nu (p_\nu dq_\nu - \eta_\nu d\xi_\nu),$$

$$0 = \delta\, dW - d\,\delta W = \omega(d, \delta) - \sum_{\nu} (\delta\eta_\nu d\xi_\nu - d\eta_\nu \delta\xi_\nu) + \tag{6}$$
$$+ \delta\left(\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{\sigma} \Lambda_\sigma \frac{\partial W_\sigma}{\partial t}\right) dt.$$

Следовательно,

$$\left[\delta\left(H + \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{\sigma} \Lambda_\sigma \frac{\partial W_\sigma}{\partial t}\right) + \sum_{\rho} F_\rho \delta H_\rho\right] dt = \sum_{\nu} (\delta\eta_\nu d\xi_\nu - d\eta_\nu \delta\xi_\nu). \qquad (**)$$

Связь формы $\omega(d, \delta)$ с дифференциальными уравнениями Гамильтона ($r = 0$) была известна давно ([2]); механическая интерпретация ее реализуется голономными системами, движущимися в поле потенциальных сил. Движение таких систем определяется дифференциальными уравнениями Лагранжа. Форма же дифференциальных уравнений движения неголономных систем до сих пор подвергается обсуждению.

С нашей точки зрения, универсальной формой уравнений движения любых систем является следующая:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} + \sum_{\rho} K_\rho \frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{q}_\nu}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_\nu} + \sum_{\rho} K_\rho \frac{\partial L_\rho}{\partial q_\nu}, \quad \nu = \overline{1, n}. \qquad (***)$$

Для того чтобы перейти от системы (*) к системе (***), необходимо заменить p_ν в функциях

$$L = -H + \sum_{\nu} p_\nu \dot{q}_\nu, \quad L_\rho = -H_\rho, \quad K_\rho = F_\rho \tag{7}$$

через $\dot{q}_\nu$ с помощью уравнений

$$\dot{q}_\nu = Q_\nu(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n). \tag{8}$$

Замену произвольной системы четного порядка (в общем случае) системой (***) можно выполнить $N = \frac{(2n)!}{2 \cdot n!}$ способами. Учитывая связь системы дифференциальных уравнений (***) с законами движения механических систем ((1), § 1), будем называть их *динамическими системами ранга большего нуля* (уравнения Лагранжа имеют нулевой ранг).

Уже эти соображения указывают на огромное значение билинейной формы $\omega(d, \delta)$ для проблем аналитической динамики. Кроме того, можно прямыми вычислениями преобразовать аналитическую форму принципа Даламбера — Лагранжа

$$\sum_{\lambda} (\mathbf{F} - \mathbf{W}_\lambda m_\lambda, \delta \mathbf{r}_\lambda) = 0 \tag{A}$$

к такому виду, чтобы билинейный ковариант (2) получил механическую интерпретацию.

Замена принципа Даламбера — Лагранжа каким-либо иным каждый раз вскрывает новые качественные свойства движений механических систем; особенно наглядно это положение иллюстрируется принципом Гаусса. Принцип Гамильтона, также являющийся преобразованием принципа Даламбера — Лагранжа, приобретает в механике сплошной среды несравненно большее значение, чем точечный принцип (А).

Вихревой принцип аналитической динамики, который будет здесь изложен, имеет фундаментальное значение для проблемы интегрирования уравнений движения.

Содержание нового принципа можно выразить в такой форме;

При движении механической системы в конфигурационном пространстве для каждого момента времени возможное, совместное со связями, изменение союзной кинетической энергии распределяется между двумя компонентами: продольной — работой на возможных перемещениях внешних сил и локальных сил инерции и поперечной — отнесенным к единице времени потоком вихря импульсов сквозь элементарную площадку, составленную действительным и возможным перемещениями:

$$\delta E = A_\delta (Q + R) + \Omega (d, \delta) / dt, \quad E = -T + \sum_\nu p_\nu \dot{q}_\nu,$$

$$p_\nu = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad \dot{q}_\nu = \frac{\partial E}{\partial \dot{p}_\nu},$$

$$\Omega (d, \delta) = \sum_{(\mu, \nu)} \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu} \right) (\delta q_\mu d q_\nu - d q_\mu \delta q_\nu), \tag{Б}$$

$$A_\delta (Q + R) = \sum_\nu \left(Q_\nu - \frac{\partial p_\nu}{\partial t} \right) \delta q_\nu, \quad \delta E = \sum_\nu \left(\frac{\partial E}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \frac{\partial E}{\partial p_\nu} \delta p_\nu \right).$$

Для доказательства эквивалентности (А) и (Б) представим поток вихря импульсов p_ν вместе с работой локальных сил инерции — dp_ν / dt в виде $\omega (d, \delta) / dt$, а затем покажем, что форма (А) основного принципа механики эквивалентна следующей:

$$-\delta E + \sum_\nu Q_\nu \delta q_\nu = \omega (d, \delta) / dt. \tag{В}$$

Вихревая форма (Б) основного принципа механики инвариантна относительно контактных преобразований: если импульсы и координаты преобразованы по формулам (5), то в новых переменных будем иметь:

$$\delta E^* = A_\delta^* (Q^* + R^*) + \Omega^* (d, \delta) / dt,$$

$$E^* = E + \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_\sigma \Lambda_\sigma \frac{\partial W_\sigma}{\partial t}, \quad Q_\nu^* = \sum_\mu Q_\mu \left(\frac{\partial q_\mu}{\partial \xi_\nu} + \sum_\lambda \frac{\partial q_\mu}{\partial \eta_\lambda} \cdot \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial \xi_\nu} \right), \tag{Б*}$$

$$\Omega^* (d, \delta) = \sum_{(\mu, \nu)} \left(\frac{\partial \eta_\nu}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial \eta_\mu}{\partial \xi_\nu} \right) (\delta \xi_\mu d \xi_\nu - \delta \xi_\nu d \xi_\mu).$$

Остановимся на некоторых следствиях, вытекающих из вихревого принципа аналитической динамики.

1. Метод Гамильтона—Якоби. Пусть внешние силы свободной от связей системы имеют потенциал U; уравнение

$$\delta (E - U) + \sum_\nu \frac{\partial p_\nu}{\partial t} \delta q_\nu + \sum_{(\mu, \nu)} \left(\frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu} - \frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} \right) \left(\delta q_\mu \frac{\partial E}{\partial p_\nu} - \delta q_\nu \frac{\partial E}{\partial p_\mu} \right) = 0 \tag{9}$$

обращается в тождество, если поле импульсов потенциально:

$$p_\nu = \partial W / \partial q_\nu, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{10}$$

а потенциал импульсов W удовлетворяет уравнению:

$$E + \partial W / \partial t = U. \tag{11}$$

Зная зависящий от некоторого числа произвольных постоянных c_j $(j=\overline{1,k}\leqslant n)$ интеграл W, находим такое же количество интегралов системы, определяющей закон движения:

$$\partial W / \partial c_j = d_j\,, \qquad j=\overline{1,k}. \tag{12}$$

2. Метод Г. К. Суслова ([3]). Рассмотрим систему в поле потенциальных сил, но подверженную действию геометрических связей

$$W_\sigma(t, q_\nu) = 0\,, \qquad \sigma = \overline{1, s}. \tag{13}$$

Выполним контактное преобразование (5), дополнив эти формулы преобразования условием совместности связей с законом движения:

$$\frac{\partial W_\sigma}{\partial t} + \sum_\sigma \frac{\partial W_\sigma}{\partial q_\nu}\frac{\partial E}{\partial p_\nu} = 0\,, \qquad \sigma = \overline{1, s}. \tag{14}$$

После преобразования форма (B) вихревого принципа преобразуется в следующую:

$$\delta(E-U) + \delta\left(\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_\sigma \Lambda_\sigma \frac{\partial W_\sigma}{\partial t}\right) = \sum_\nu (\dot{\xi}_\nu \delta\eta_\nu - \dot{\eta}_\nu \delta\xi_\nu)\,. \tag{B*}$$

Уравнение это обратится в тождество, если положить $\dot{\xi}_\nu = \dot{\eta}_\nu = 0$, а функцию W определить, как полный интеграл уравнения:

$$E + \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_\sigma \Lambda_\sigma \frac{\partial W_\sigma}{\partial t} = U. \tag{15}$$

В силу того, что функции W_σ не зависят от ξ_ν, интегралами уравнений движения будут зависимости такого же типа, как и в методе Гамильтона — Якоби:

$$\partial W / \partial \xi_\nu = -\eta_\nu\,. \tag{16}$$

Отсюда следует указание на такую зависимость потенциала импульсов W от произвольных постоянных:

$$W = V(t, q_1, \ldots, q_n; \xi_1, \ldots, \xi_{n-s}) + \sum_\sigma \xi_{n-s+\sigma} W_\sigma\,, \tag{17}$$

а это возможно при наличии (13) лишь в том случае, когда уравнение (15) инвариантно относительно подстановки (17). Но это имеет место по построению.

Если W — частный интеграл, зависящий от k произвольных постоянных, то из вихревой формы (Б) следуют интегралы (12).

3. Вихревые уравнения динамики. При совместном действии геометрических и кинематических (неголономных) связей

$$W_\sigma(t, q_\nu) = 0, \quad \sigma = \overline{1, s}, \qquad \sum_\nu A_\nu \dot{q}_\nu + A_\rho = 0\,, \quad \rho = \overline{1, r}, \tag{18}$$

потенциальный метод должен быть заменен вихревым (([1]), теорема V)). В этом случае из вихревой формы (Б) следуют уравнения:

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial t} + \sum_\mu \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial E}{\partial p_\mu} + \frac{dE}{dq_\nu} = Q_\nu + \sum_\sigma f_\sigma \frac{\partial W_\sigma}{\partial q_\nu} + \sum_\rho g_\rho A_{\nu\rho}\,. \tag{Г}$$

Институт математики и механики
Академии наук Уз. ССР

Поступило
17 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Аржаных, Тр. Ин-та математ. и мех. АН Уз. ССР (1948). [2] Е. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, 1937, стр. 340. [3] Г. К. Суслов, Теоретическая механика, 1946, стр. 461.