Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

ОБ АДДИТИВНЫХ МАЙОРАНТАХ КОНЕЧНОГО* РОСТА

§ 1. Будем называть майоранту $H(x)\geqslant 0$ конечного роста $(H(x)\in\mathfrak{M})$ аддитивной и будем обозначать этот частный класс майорант через $\mathfrak{A}$ $(H(x)\in\mathfrak{A})$, если для некоторого $c>0$ функция $(H(x)+c)\in\mathfrak{M}$; в дальнейшем все рассматриваемые нами майоранты предполагаются целыми функциями конечной степени (или их модулями).

Теорема 1. *Если* $H(x)\in\mathfrak{A}$, $H_1(x)\in\mathfrak{A}$, *то* $(H(x)+H_1(x))\in\mathfrak{A}$.

Действительно, согласно следствию 4 заметки [1] видим, что утверждение $H(x)\in\mathfrak{A}$ эквивалентно условию

$$A_H=\int_0^\infty \frac{\log(H(x)+1)(H(-x)+1)}{1+x^2}\,dx<\infty. \tag{A}$$

* В моей заметке [1] рассматривается более общий, по видимости, класс майорант «квази-конечного» роста. Однако для случая, которым мы ограничиваемся здесь, когда майоранта $H(x)=|s(x)+it(x)|$ есть модуль целой функции конечной степени, Б. Я. Левиным [2] установлен принципиально существенный факт, что все функции конечной степени квази-конечного роста являются функциями конечного роста. А именно, между тем как мое условие [1] майорантности гласит: «*Условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\beta_k|}{\alpha_k^2+\beta_k^2}<\infty, \tag{I}$$

где $\alpha_k+i\beta_k$ (отличные от нуля) *корни функции* $s(z)+it(z)$, *необходимо и достаточно для того, чтобы* $H(x)=|s(x)+it(x)|$ *было майорантой квази-конечного роста; при этом, если* $s(z)+it(z)$ *не имеет корней в верхней полуплоскости, то, при условии* (I), *неравенство*

$$|G_p(x)|\leqslant H(x)\quad(-\infty<x<\infty), \tag{II}$$

где $G_p(x)$ — *целая функция степени* p, *влечет за собой*

$$|G_p(z)|\leqslant|s(z)+it(z)\,e^{-ikz}| \tag{III}$$

для всех $z=x+iy\ (y\geqslant 0)$ *при некотором* $k\leqslant p$“, Б. Я. Левин, независимо от меня, показал не только что условие (I) достаточно для того, чтобы из (II) следовало (III), но существенно уточнил этот результат, обнаружив, что число k удовлетворяет равенству

$$h_{G_p}(\theta)=\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{1}{r}\log|G_p(z)|=\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{1}{r}\log|(s(z)+it(z))e^{-ikz}| \tag{IV}$$

при всех значениях $z=re^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

Пользуюсь случаем, чтобы привести здесь доказательство моего выше формулированного утверждения касательно необходимости условия (I). Для этого нужно лишь показать, что в случае нарушения (I) всегда возможно построить такую последовательность функций $\{G_{p,n}(x)\}$ степени p, удовлетворяющих (II), что $\lim\limits_{n=\infty}G_{p,n}(x)=G(x)$ при всех x, причем, однако, функция $G(x)$ не есть функция конечной степени. Итак, пусть в правой части (II)

$$H(x)=e^{bx}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\alpha_k-i\beta_k}\right)e^{\frac{x}{\alpha_k-i\beta_k}}\left(1-\frac{x}{\alpha_k+i\beta_k}\right)e^{\frac{x}{\alpha_k+i\beta_k}}=$$

$$=e^{bx}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2-2\alpha_k x}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\right)e^{\frac{2\alpha_k x}{\alpha_k^2+\beta_k^2}}$$

Следовательно, для всех $R>0$

$$\int_0^R \frac{\log (H(x)+H_1(x))(H(-x)+H_1(-x))}{1+x^2}\,dx<$$

$$< A_H + A_{H_1} + \int_0^R \frac{\log 4H(x)\,H_1(x)\,H(-x)\,H_1(-x)}{1+x^2}\,dx < 2(A_H + A_{H_1}) + \pi \log 2.$$

Поэтому $(H(x)+H_1(x)) \in \mathfrak{M}$, и, так как условие (А) не зависит от постоянной $c>0$, имеем также $(H(x)+H_1(x)+1) \in \mathfrak{M}$, т. е. $(H(x)+ H_1(x)) \in \mathfrak{A}$.

Благодаря (А) из теоремы 1 вытекают следствия:

1. *Если* $H(x) \in \mathfrak{A}$ *и* $|f(x)| \leqslant H(x)$, *то* $|f(x)| \in \mathfrak{A}$. 2. *Если майоранта* $H(x) \in \mathfrak{M}$ *позитивна* (1), (*т. е.* $H(x)>c>0$ *при* $-\infty<x<\infty$), *то* $H(x) \in \mathfrak{A}$. 3. *Если* $H(x)$ — *четная майоранта, то условие**

$$A_H^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ H(x)}{1+x^2}\,dx < \infty \qquad (\text{A}^*)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы $H(x) \in \mathfrak{A}$.

Первые два следствия очевидны; третье получается из неравенства

$$A_H - \pi \log 2 < A_H^* < A_H.$$

любая функция конечной степени (без ущерба для общности, принимаем $H(0)=1$); нарушение (I) не препятствует тому, чтобы $H(x)$ была конечной степени, так как, по критерию Линделефа, для этого необходимо и достаточно лишь существование постоянных $c_1>0$, $c_2>0$, для которых при любом n

$$\frac{n}{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}} < c_1, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k \pm i\beta_k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\right| < c_2.$$

Напротив, при нарушении (I) условие Линделефа для функции

$$F(x) = e^{bx} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{x}{\alpha_k - i\beta_k}\right)^2 e^{\frac{2x}{\alpha_k - i\beta_k}}$$

не выполнено; поэтому $F(x)$ не может быть конечной степени, в то время как все функции

$$G_{p,n}(x) = e^{bx} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{x}{\alpha_k - i\beta_k}\right)^2 e^{\frac{2x}{\alpha_k - i\beta_k}} \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1+\frac{x^2-2\alpha_k x}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\right) e^{\frac{2\alpha_k x}{\alpha_k^2+\beta_k^2}}$$

той же самой конечной степени, что $H(x)$ (от которой они отличаются лишь конечным числом множителей). А между тем

$$|G_{p,n}(x)| = H(x) \text{ при } -\infty<x<\infty, \text{ и } \lim_{n=\infty} G_{p,n}(x) = F(x).$$

* Определение «аддитивности», принятое в настоящей заметке, которое оправдывается теоремой 1, отличается от предложенного в заметке (1), так как формулированное там следствие 6, утверждавшее, что сумма четных майорант $H(x)+H_1(x)$ есть майоранта (как заметил мне Б. Я. Левин), нуждается в некотором ограничении, которое я получил в виде условия (А*), совпадающего во многих случаях с условием майорантности: в частности, условие (А*) выполнено, когда $H(x)$ и $H_1(x)$ нулевого рода. Более того, сумма двух четных функций нулевого рода $F(x)=H(x)+ H_1(x)$ есть функция нулевого рода. Действительно,

$$|H(x)| = c\left|x^m \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a_k^2}\right)\right| \leqslant c(1+x^2)^m \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{|a_k^2|}\right) = H^*(x),$$

$$|H_1(x)| \leqslant H_1^*(x),$$

где $H^*(x) \in \mathfrak{A}$ и $H_1^*(x) \in \mathfrak{A}$ аддитивны как (четные) позитивные функции нулевого рода. При этом $H^*(x)+H_1^*(x)$ является майорантой не только для $F(x)$, но и для $F(ix)$; поэтому (следствие 1 (1)) $F(x)$ должна быть нулевого рода.

§ 2. Нетрудно видеть (см., например, Н. И. Ахиезер [3]), что условие (I), характеризующее функции конечного роста, является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $H(z)$ конечной степени допускала представление

$$H(z)=ae^{bz}z^{m}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k+i\beta_k}\right)e^{\frac{\alpha_k z}{\alpha_k^2+\beta_k^2}}. \qquad (\mathrm{M})$$

В согласии с определением, данным в моей статье [4] (стр. 441), назовем функцию $H(z)$ канонической, если b — число вещественное, так как в этом случае из той же заметки [3] Н. И. Ахиезера следует, что степень $H(z)e^{ikz}$ при всяком $k \gtrless 0$ больше степени $H(z)$. Отсюда видно, что и произведение канонических функций есть каноническая функция.

Лемма 1*. *Две канонические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ одинаковой степени p, имеющие одну и ту же майоранту $|H(x)|$ конечной степени, имеют одну и ту же индикаторную диаграмму.*

Действительно, без ущерба для общности, можно считать функцию $H(z)$ канонической, так что ее индикаторная диаграмма, так же как диаграммы $f_1(z)$ и $f_2(z)$, симметричны относительно вещественной оси. Поэтому, так как равенства (IV) Б. Я. Левина

$$h_{f_1}(\theta)=h_H(\theta)+k_1|\sin\theta|, \qquad h_{f_2}(\theta)=h_H(\theta)+k_2\sin\theta \qquad (\mathrm{IV}^{\mathrm{bis}})$$

справедливы при $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, они верны также при $0\geqslant\theta\geqslant-\pi$. Следовательно, $h_{f_1}(\theta)-h_{f_2}(\theta)=(k_1-k_2)|\sin\theta|$ при всех θ, и если степени f_1 и f_2 равны, то $k_1-k_2=0$.

Теорема 2 (об индикаторной диаграмме **). *Если $F(x)\in\mathfrak{A}$ есть каноническая функция степени p (в частности, вещественная), то ее индикаторной диаграммой служит отрезок мнимой оси $(-pi, pi)$.*

В самом деле, предположим сначала, что майоранта $|F(x)|$ позитивна, т. е. $|F^2(x)|=F(x)\overline{F}(x)>c^2>0$; тогда в числе вещественных функций степени p, имеющих $|F(x)|$ майорантой, будет функция $c\cos px$ и отрезок $(-pi, pi)$, служащий ей индикаторной диаграммой, по лемме 1, будет также индикаторной диаграммой для $F(x)$. В общем случае, учитывая аддитивность, видим, что $F(x)\overline{F}(x)+1$ является общей майорантой для $F^2(x)$ и $\cos^2 px$, и, следовательно, индикаторные диаграммы $F(x)$ и $\cos px$ совпадают по той же лемме.

Предположим, что, каково бы ни было $\varepsilon>0$, функция $F(z)$, имеющая индикаторной диаграммой отрезок, параллельный мнимой оси (или лежащий на ней), может быть представлена в виде такого произведения $F(z)=F_1(z)H_0(z)$, где $H_0(z)$ — функция нулевой степени, что существует предел

$$\lim_{r=\infty}\frac{1}{r}\log|F_1(re^{i\theta})|=\delta_{F_1}(\theta)=\delta_F(\theta)=h_F(\theta)$$

при всех θ ($|\sin\theta|\geqslant\varepsilon$); обозначим его через $\delta_F(\theta)=\lim\limits_{r=\infty}{}^{0}\frac{1}{r}\log|F(re^{i\theta})|=h^F(\theta)$ и назовем показателем степени $F(z)$ в направлении θ.

Из определения непосредственно следует

Лемма 2. *Произведение $F(z)=f_1(z)f_2(z)$ двух функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, имеющих показатели степени во всех направлениях, обладает тем же свойством, и $\delta_F(\theta)=\delta_{f_1}(\theta)+\delta_{f_2}(\theta)=h_{f_1}(\theta)+h_{f_2}(\theta)$.*

---

* Эта важная лемма, являющаяся следствием равенства (IV), принадлежит, по существу, Б. Я. Левину (см. первую сноску).

** Эта теорема включает как частный случай теорему 3 заметки [1], которая может быть доказана более элементарно.

Будем называть майоранту $F(x) \geqslant 0$ почти позитивной, если существует отличная от нуля функция $G_0(x)$ нулевой степени, удовлетворяющая (II), где $H(x) = F(x)$. Все позитивные майоранты $F(x) \geqslant c > 0$ почти позитивны (как мы видели, в этом случае* $F(x) \in (\mathfrak{A})$.

Лемма 3. *Всякая почти позитивная майоранта $H(x)$ является модулем канонической функции $f(z)$ конечной степени p, имеющей показатели степени $\delta_f(\theta) = p \mid \sin\theta \mid$ во всех направлениях.*

В самом деле, по определению,

$$|f(x)| \geqslant |G_0(x)| \quad (-\infty < x < \infty). \tag{II^{bis}}$$

Поэтому, полагая, что $f(z)$, как и функция нулевой степени $G_0(z)$, не имеет корней в верхней полуплоскости, имеем, вследствие (III) и (IV^{bis}):

$$\frac{1}{r}\log\left|\frac{F(re^{i\theta})}{G_0(re^{i\theta})}\right| \geqslant p\sin\theta = \overline{\lim_{r=\infty}}\frac{1}{r}\log|f(re^{i\theta})| = \lim_{r=\infty}{}^0\frac{1}{r}\log|f(re^{i\theta})| = \delta_f(\theta)$$

при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Но если в каноническом произведении $f(z)$ любые из корней $\alpha_k + i\beta_k$ заменить через $\alpha_k - i\beta_k$, то для всех полученных таким образом функций $f^*(z)$ (причем $|f^*(x)| = |f(x)|$ при $-\infty < x < \infty$) имеем $\delta_{f^*}(\theta) = \delta_f(\theta) = p|\sin\theta|$. Из лемм 2 и 3 вытекает** также

Следствие 4. *Степень произведения $F(z) = f_p(z) f_q(z)$ двух почти позитивных канонических функций степеней p и q, соответственно, равна $p+q$.*

Теорема 3. *Степень произведения $\Phi(z) = G_p(z) G_q(z)$, где p и q — степени канонических функций $G_p(z) \in \mathfrak{A}$, $G_q(z) \in \mathfrak{A}$, равна $p+q$.*

Так как степень функции $\in \mathfrak{A}$ не изменяется при переменах знака мнимой части ее корней, положим, что $G_p(z)$ и $G_q(z)$ не имеют корней в верхней полуплоскости и введем канонические функции $G_p^*(z)$, $G_q^*(z)$, определенные равенствами

$$G_p^*(z)\overline{G}_p^*(z) = G_p(z)\overline{G}_p(z) + 1 = H_{2p}(z),$$

$$G_q^*(z)\overline{G}_q^*(z) = G_q(z)\overline{G}_q(z) + 1 = H_{2q}(z)$$

и условием, что корни $G_p^*(z)$ и $G_q^*(z)$ лежат в верхней полуплоскости. На основании следствия 4, степень произведения позитивных функций $H_{2p}(z) H_{2q}(z) = G_p(z) G_q(z) \overline{G_p(z) G_q(z)} + G_p(z)\overline{G}_p(z) + G_q(z)\overline{G}_q(z) + 1$ равна $2p + 2q$, а потому необходимо, чтобы степень $\Phi(z) = G_p(z) G_q(z)$, которая равна степени $\overline{\Phi}(z)$, была равна $p+q$.

Поступило
8 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, **65**, № 2 (1949). [2] Б. Я. Левин, ДАН. **65**, № 5 (1949). [3] Н. И. Ахиезер, ДАН, **63**, № 5 (1948). [4] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., **12**, 421 (1948). [5] С. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extrémales..., Paris, 1926.

* Нетрудно видеть, что функция $F(x) \in \mathfrak{A}$ может, вообще, не быть почти позитивна, и наоборот: например, $\cos x \in \mathfrak{A}$ не почти позитивна, так как, кроме нуля, нет функции $|G(x)| \leqslant |\cos x|$ $(-\infty < x < \infty)$ степени ниже первой, а почти позитивная функция (([5]), стр. 198)

$$f(x) = \prod_{k=2}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{k(\log k)^{\alpha}}\right) \qquad (1 < \alpha < 2)$$

не принадлежит классу $\mathfrak{A}$. Прибавлю, что все предложения Добавления статьи ([4]) справедливы для функций $F(x) \in \mathfrak{A}$.

** Как сообщил мне Б. Левин, им получены некоторые аналогичные результаты.