Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 5

МАТЕМАТИКА

А. А. ЛЯПУНОВ

О ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ОПЕРАЦИЯХ, СОХРАНЯЮЩИХ ИЗМЕРИМОСТЬ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 II 1949)

Одной из основных задач дескриптивной теории множеств является установление измеримости возможно более широких классов множеств. Известно, что этим свойством обладают A-, C- и R-множества ([1—3]). Отметим, что измеримость A-множеств играет существенную роль в различных вопросах анализа.

Целью настоящей заметки является описание некоторой системы теоретико-множественных операций, которые позволяют строить новые классы измеримых множеств. Существенной чертой этих операций является то, что они классифицируются естественным образом по трансфинитам третьего класса, причем для „не слишком больших" трансфинитов третьего класса эти операции могут быть определены вполне индивидуально. Для того чтобы провести построение для всех трансфинитов третьего класса, неизбежно применение аксиомы Цермело. Начиная с того места, где используется аксиома Цермело, система операций оказывается ветвящейся.

1. Теоретико-множественная операция (т. м. операция) с базой N над произвольной последовательностью множеств $\{E_n\}$ определяется так:

$$\Psi_N(\{E_n\}) = \sum_{\eta \in N} \prod_{n \in \eta} E_n \cdot \prod_{m \bar{\in} \eta} CE_m.$$

Если $N \equiv 0$, то $\Psi_N(\{E_n\}) = 0$. Общие свойства этих операций были изучены Л. В. Канторовичем и Е. М. Ливенсоном ([4]) и Ю. С. Очаном ([5]). Если база N зависит от точки x, то получается т. м. операция с переменной базой:

$$\Psi_{N(x)}(\{E_n\}) = \sum_x [x]\, \Psi_{N(x)}(\{E_n\}),$$

где $[x]$ обозначает множество, состоящее из одной точки x. База т. м. операции, в отличие от δs-операций, определяется операцией единственным образом. Ю. С. Очан ввел изображение этих баз на канторовском совершенном множестве. Дополнительная т. м. операция определяется так:

$$\Psi_{N^c}(\{E_n\}) = C\Psi_N(\{CE_n\}),$$

ее база изображается на канторовском множестве как зеркальное отражение дополнения к базе N от точки $1/2$ ([5]). В частности, базы N и N^c одновременно входят в проективный класс B_n. В этом случае класс B_n инвариантен относительно обеих операций Ψ_N и Ψ_{N^c}. Мы будем рассматривать операцию

$$\Psi_{\bar{N}}(\{E_n\}) = \underset{m}{\Psi}_N(\{E_{2m}\}) \cdot \underset{m}{\Psi}_{N^c}(\{E_{2m-1}\}).$$

2. Пусть дана т. м. операция Ψ_M и таблица множеств $\mathscr{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$. Мы положим

$$E^*_{n_1 \ldots n_k} = \underset{n_{k+1}}{\Psi_M}(\{E_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}\}),$$

$$E'_{n_1 \ldots n_k} = E^* \cdot E^*_{n_1} \cdot \ldots \cdot E^*_{n_1 \ldots n_k}$$

и будем писать $\mathscr{E}' = \{E'_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}\} = M \cdot \mathscr{E}$. Пусть $\mathscr{E}^0 = \mathscr{E}$. Если определена таблица $\mathscr{E}^\alpha$, то пусть $\mathscr{E}^{\alpha+1} = M \cdot \mathscr{E}^\alpha$. Для чисел γ второго рода положим $\mathscr{E}^\gamma = \{E^\gamma_{n_1 \ldots n_k}\}$, где для всякого кортежа $(n_1 \ldots n_k)$ $E^\gamma_{n_1 \ldots n_k} = \prod\limits_{\alpha < \gamma} E^\alpha_{n_1 \ldots n_k}$. Пусть, далее, $E^\Omega = \prod\limits_{\alpha < \Omega} E^\alpha$. Положим $R_{[M]}(\mathscr{E}) = E^\Omega$. Если $x \in E^\Omega$, то пусть $R\,\mathrm{Ind}_{[M]}(x/\mathscr{E}) = \Omega$, а $R\,\mathrm{Ind\ int}_{[M]}(x/\mathscr{E})$ есть наименьшее из чисел β такое, что строение таблицы $\mathscr{E}^\alpha$ при $\alpha \geqslant \beta$ остается неизменным в точке x. Если $x \in CE^\Omega$, то $R\,\mathrm{Ind}_{[M]}(x/\mathscr{E})$ равен наименьшему числу β, для которого $x \,\overline{\in}\, CE^\beta$.

Множества точек, где внешний и внутренний индексы постоянны и $< \Omega$, может быть получено из множеств таблицы $\mathscr{E}$ конечным или счетным применением операций C, Π, Σ и Ψ_M. Пусть $m = f(n_1 \ldots n_k)$ — некоторое фиксированное взаимно-однозначное отображение всех кортежей на натуральные числа и $K_{f(n_1 \ldots n_k)} = E_{n_1 \ldots n_k}$; мы определим теоретико-множественную операцию $\Psi_{RM}(\{K_m\}) = E^\Omega$.

3. Рассмотрим таблицу множеств $\{H_{n_1 \ldots n_k}\} \equiv S$ и индексы, которые она определяет при помощи Г-операции ([6]). Будем обозначать эти индексы $\Gamma\,\mathrm{Ind}(x/S)$ и $\Gamma\,\mathrm{Ind\,int}(x/S)$. Отметим, что каждой точке $x \in \Gamma(S)$ отвечает не только значение внутреннего индекса $\beta(x) = \Gamma\,\mathrm{Ind\,int}(x/S)$, но и пересчет сегмента трансфинитов, предшествующих числу $\beta(x)$. Допустим, что дана некоторая последовательность т. м. операций Ψ_{N_α}, определенных для всех $\alpha < \gamma$, где γ — число второго рода. Пусть, кроме того, дана таблица множеств $S = \{H_{n_1 \ldots n_k}\}$ и последовательность множеств $\mathscr{E} = \{E_n\}$. Отберем те точки x, в которых $\Gamma\,\mathrm{Ind\,int}(x/S) = \gamma$. Каждой такой точке отвечает пересчет сегмента трансфинитов $< \gamma$: $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_i(x), \ldots$ Составим операцию

$$\Psi_{N(x)}(\{E_i\}) = \prod_i \underset{t}{\Psi}_{N_{\alpha_i(x)}}\left(\left\{E_{2^{i-1}(2t-1)}\right\}\right).$$

Если же $\Gamma\,\mathrm{Ind\,int}(x/S) \neq \gamma$, то положим $N_{\gamma(x)} = 0$. При этом, если операции Ψ_{N_α} определяют индексы, то пусть внутренний и внешний $\mathrm{Ind}_{N(x)}$ определяется как sup и $\inf \mathrm{Ind}_{N_{\alpha_i}}$

$$D_{N_\gamma}(\mathscr{E}, S) = \sum_x [x]\, \Psi_{N(x)}(\{E_n\}).$$

Отметим, что эта операция, в свою очередь, определяет как внутренний, так и внешний индексы, если таковые определяют операцию Ψ_{N_α}.

Если $x \bar{\in} \Gamma(S)$, то заведомо $x \bar{\in} D_{N_\gamma}(\mathscr{E}, S)$. Мы положим $D_{N_\gamma} \operatorname{Ind}(x/\mathscr{E}, S) = \Gamma \operatorname{Ind}(x/S)$. Если же $x \in \Gamma(S)$, то в точке x определена непустая база $N(x)$. Если $x \in D_{N_\gamma}(\mathscr{E}, S)$, то пусть $D_{N_\gamma} \operatorname{Ind int}(x/\mathscr{E}, S) = \Psi \operatorname{Ind int}_{N(x)}(x/\mathscr{E})$.

Если же $x \bar{\in} D_{N_\gamma}(\mathscr{E}, S)$, то $D_{N_\gamma} \operatorname{Ind}(x/\mathscr{E}, S) = \Psi \operatorname{Ind}_{N(x)}(x/\mathscr{E})$. Если положим $K_{2f(n_1 \ldots n_k)} = H_{n_1 \ldots n_k}$ и $K_{2m-1} = E_m$, то операция D_{N_γ} обратится в т. м. операцию над последовательностью $\{K_n\}$, которая, очевидно, произвольна. Мы положим

$$\Psi_{N_\gamma}(\{K_n\}) = D_{N_\gamma}(\mathscr{E}, S).$$

4. Теперь мы приступим к построению трансфинитной системы усиливающихся т. м. операций. Пусть дана операция $\Psi_N = \Psi_{N_0}$. Допустим, что определена операция Ψ_{N_α}. Тогда пусть $\Psi_{N_{\alpha+1}} = \Psi_{R\bar{N}_\alpha}$. Допустим, что определены операции Ψ_{N_α} для всех $\alpha < \gamma$, тогда мы определим операцию Ψ_{N_γ}, как это описано в п. 3. Пусть, наконец, определены все операции Ψ_{N_α} для всех чисел $\alpha < \delta$, где δ — число третьего класса и третьего рода. Мы выберем возрастающую последовательность типа Ω трансфинитов, стремящихся к δ, $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \ldots < \alpha_\beta < \ldots \to \delta$, и определим операцию Ψ_{N_δ}, которая будет зависеть не только от числа δ, но и от выбранной строки трансфинитов. Рассмотрим таблицу множеств $S = \{H_{n_1 \ldots n_k}\}$ и в точках, где $\Gamma \operatorname{Ind int}(x/S) = \beta$, положим $N(x) = N_\beta$. В остальных точках положим $N(x) = 0$. Тогда, по определению:

$$\Psi_{N_\delta}(\{K_n\}) = \sum_x [x] \Psi_{N(x)}(\{E_n\}),$$

где множества K_n определены так же, как в п. 3. Такое построение ведется по трансфинитам первого, второго и третьего классов. Оно становится ветвящимся для „больших“ трансфинитов третьего класса, к которым невозможно подобрать индивидуальных последовательностей сходящихся трансфинитов. Отметим, что для операций, возникающих на числах третьего рода, также возможно определение индексов. Если $x \in C\Gamma(S)$, то заведомо $x \in C\Psi_{N_\delta}(\{K_n\})$. Мы положим $\Psi_{N_\delta} \operatorname{Ind}(x/\mathscr{E}, S) = \Gamma \operatorname{Ind}(x/S)$. Если же $x \in \Gamma(S)$, $\Gamma \operatorname{Ind}(x/S) = \beta(x)$. Положим $N(x) = N_{\beta(x)}$. Если $x \in \Psi_{N_\delta}(\{K_n\})$, то пусть $\Psi_{N_\delta} \operatorname{Ind int}(x/\{K_n\})$ равен наибольшему из чисел $\Gamma \operatorname{Ind int}(x/S)$ и $\Psi_{N(x)} \operatorname{Ind int}(x/\mathscr{E})$. Если же $x \bar{\in} \Psi_{N_\delta}(\{K_n\})$, то пусть $\Psi_{N_\delta} \operatorname{Ind}(x/\{K_n\})$ равен наибольшему из чисел $\Gamma \operatorname{Ind int}(x/S)$ и $\Psi_{N(x)} \operatorname{Ind}(x/\mathscr{E})$. Так определенные индексы во многих отношениях родственны индексам решет и A- или R-операций.

5. Пусть Ξ обозначает класс открытых множеств беровского пространства.

Ввиду того что описанные операции ветвятся, если $\alpha_1 < \alpha_2$, то мы будем говорить, что операции $\Psi_{N_{\alpha_1}}$ и $\Psi_{N_{\alpha_2}}$ согласованы, если в определении операции $\Psi_{N_{\alpha_2}}$ для числа α_1 всегда фигурирует данная операция $\Psi_{N_{\alpha_1}}$.

Теорема 1. *Если $\alpha_1 < \alpha_2$ и операции $\Psi_{N_{\alpha_1}}$ и $\Psi_{N_{\alpha_2}}$ между собой согласованы, то класс $\Psi_{N_{\alpha_1}}(\Xi)$ составляет правильную часть класса $\Psi_{N_{\alpha_2}}(\Xi)$.*

Т е о р е м а 2. *Если операция* Ψ_{N_0} *сохраняет измеримость, то и все операции* Ψ_{N_α} *ее сохраняют. В этом случае внешние и внутренние индексы регулярны относительно меры.*

Аналогичные теоремы верны для свойства Бера и для дескриптивной измеримости.

Т е о р е м а 3. *Если* $\Psi_{N_0}(\{E_n\}) = \sum E_n$, *то класс R-множеств совпадает с суммой* $\sum\limits_{\alpha < \Omega} \Psi_{N_\alpha}(\Xi)$.

Таким образом, отправляясь от открытых множеств и операции Σ и применяя описанный процесс, мы образуем классы измеримых множеств, определяемые эффективно и содержащие в себе класс всех R-множеств. Эти классы нумеруются некоторыми трансфинитами третьего класса. С помощью аксиом Цермело их можно построить для всех трансфинитов третьего класса.

Отметим, что в отношении построения измеримых множеств здесь устанавливается картина, родственная той, которую П. С. Новиков установил для построения эффективных множеств ([7]).

Поступило
10 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Л у з и н, Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, 1930. [2] Е. А. С е л и в а н о в с к и й, Матем. сб., **35**, 379 (1928). [3] А. А. Л я п у н о в, ДАН, **58**, № 9 (1947). [4] Л. В. К а н т о р о в и ч и Е. М. Л и в е н с о н, Fund. Math., **18**, 214 (1932). [5] Ю. С. О ч а н, Матем. сб., **10** (52): 3, 151 (1942). [6] П. С. А л е к с а н д р о в, Fund. Math., **5**, 160 (1924). [7] Н. Н. Л у з и н, О некоторых новых результатах в дескриптивной теории функций, изд. АН СССР, 1935.