Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. Я. ЛЕВИН

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ*

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 II 1949)

Эта заметка посвящена установлению некоторых общих положений теории целых функций конечной степени, позволяющих получать для этих функций различные точные оценки, аналогичные тем, которые были впервые установлены С. Н. Бернштейном ([1-3]).

В основе нашего исследования лежит лемма, являющаяся обобщением известного принципа Фрагмена и Линделефа.

Лемма 1. *Если $\omega(z)$ и $f(z)$ — целые функции конечной степени, $\omega(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости и*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{1}$$

$$\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right| \leqslant e^{k|y|} \qquad (y = \operatorname{Im} z \leqslant 0), \tag{2}$$

$$h_f(\theta) = h_\omega(\theta) + k|\sin\theta| \qquad (\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \tag{3}$$

где k — некоторая константа, а $h_F(\theta)$ обозначает индикатор роста функции $F(z)$, т. е.

$$h_F(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|F(re^{i\theta})|}{r}.$$

Следствие. *Индикаторная диаграмма функции $\omega(z)$, не имеющей корней в нижней полуплоскости, симметрична относительно прямой, параллельной вещественной оси**.*

Для доказательства достаточно в лемме 1 положить $f(z) = \omega(z)$. Тогда

$$h_\omega(\theta) = h_\omega(-\theta) + k\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

Осью симметрии индикаторной диаграммы функции $\omega(z)$ является прямая $y = k/2$.

Определение 1. Число $d_\omega = \frac{1}{2}\left[h_\omega\left(-\frac{\pi}{2}\right) - h_\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ мы будем называть дефектом функции $\omega(z)$.

Определение 2. Функции конечной степени с неотрицательным дефектом и не имеющие корней в нижней полуплоскости $(\operatorname{Im} z < 0)$ мы будем называть функциями класса P. Класс функций степени $\sigma \geqslant 0$ и класса P мы будем обозначать P_σ.

---

* Предлагаемая статья Б. Я. Левина, которая представляет значительный интерес и, в частности, позволяет придать более законченный вид результатам моей последней заметки (ДАН, т. 65, № 2, 1949), написана совершенно независимо от меня.
Акад. С. Бернштейн

** Это утверждение было сообщено мне М. Г. Крейном, который доказал его другим путем.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция конечной степени τ и $\omega(z)$ — конечной степени $\sigma \geqslant \tau$. Для того чтобы функция*

$$\varphi_u(z) = f(z) - u\omega(z) \tag{4}$$

была класса P при любом комплексном и с модулем $|u| \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы: a) *функция* $\omega(z)$ *была класса P*; b) $|f(x)| \leqslant |\omega(x)|$ $(-\infty < x < \infty)$.

Мы ограничимся доказательством достаточности. По лемме 1 из a) и b) следует, что

$$h_f(\theta) = h_\omega(\theta) + k|\sin\theta| \quad (\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

Но, при некотором значении θ_0 $(\pi \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi)$, $h_\omega(\theta_0) = \sigma$ в то время, как $h_f(\theta) \leqslant \tau \leqslant \sigma$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$. Таким образом, убеждаемся в том, что $k \leqslant 0$ и, в силу (2), $|f(z)/\omega(z)| < 1$ при $\operatorname{Im} z < 0$, если нет тождественного равенства $f(z) \equiv e^{i\gamma}\omega(z)$ (γ — вещественная константа). Итак, при $|u| \geqslant 1$ функция $\varphi_u(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости.

Очевидно, что при $|u| > 1$ и $\operatorname{Im} z \leqslant 0$

$$\varliminf_{|z| \to \infty} |f(z)/\omega(z) - u| \geqslant |u| - 1.$$

Отсюда получается, что в этом случае $h_\varphi(\theta_0) = \sigma$. С другой стороны, индикатор роста суммы двух функций не превышает наибольшего из индикаторов слагаемых и, следовательно, $h_\varphi(-\theta_0) \leqslant \sigma$. Если учесть, что индикаторная диаграмма функции $\varphi_u(z)$ симметрична относительно прямой $y = d_\varphi$, то из неравенства $h_\varphi(-\theta_0) \leqslant h_\varphi(\theta_0)$ следует $d_\varphi \geqslant 0$. Следовательно, при $|u| > 1$, функция $\varphi_u(z)$ принадлежит к классу P. Переходя к пределу при $u \to e^{i\gamma}$ (γ — вещественное число) в неравенстве $|\varphi_u(z)/\overline{\varphi}_u(z)| < 1$, мы убеждаемся в том, что функция $\varphi_u(z)$ при $u = e^{i\gamma}$ есть функция класса P *.

Определение. Аддитивный однородный оператор над функциями конечной степени мы назовем $\mathfrak{B}$-оператором, если он функции класса P переводит в функции класса P.

Теорема 1. *Если $\omega(z)$ — функция класса P_σ, а $f(z)$ — функция конечной степени $\tau \leqslant \sigma$ и*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{5}$$

то

$$|\mathfrak{B}[f(x)]| \leqslant |\mathfrak{B}[\omega(x)]| \quad (-\infty < x < \infty), \tag{6}$$

где $\mathfrak{B}$ — любой $\mathfrak{B}$-оператор.

Нетрудно показать, что оператор дифференцирования $Df = f'(x)$ является $\mathfrak{B}$-оператором.

Более того, если функция $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ есть функция класса P, то оператор $\overline{\varphi}(D) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{c}_k D^k$ применим ко всем функциям конеч-

---

* Примененный для доказательства леммы 2 прием является развитием одного приема Н. И. Ахиезера (см. ([3]), лемма, стр. 414).

ной степени, не увеличивает степени функции и является $\mathfrak{B}$-оператором. Заметим, что если не имеет места ни одно из равенств:

$$\varphi(z) \equiv ce^{kz}, \quad \omega(z) \equiv e^{\alpha z} P(z) \quad \text{или} \quad \omega(z) \equiv e^{i\gamma} f(z),$$

где c, k, α и γ — вещественные постоянные, а $P(z)$ — полином, то в (6) будет достигнут знак равенства тогда и только тогда, когда все корни функции $\varphi(z)$ вещественны, дефект d_φ равен нулю и $e^{i\gamma} f(x) = \mathrm{Re}\{e^{i\gamma_1}\omega(x)\} + ic\,\mathrm{Im}\{e^{i\gamma_1}\omega(x)\}$ при некоторых вещественных числах γ, γ_1 и c, причем $|c| \leqslant 1$. Заметим также, что, если функция конечной степени $\omega(z)$ не принадлежит классу P, то существует функция $f(z)$, степень которой не превышает степени $\omega(z)$, удовлетворяющая неравенству (5) и такая, что в некоторой точке x_0 $|f'(x_0)| > |\omega'(x_0)|$. Таким образом, при $\mathfrak{B} = D$ принадлежность функции $\omega(z)$ классу P есть также необходимое условие того, чтобы из (5) следовало (6).

Polya и Schur ([4]) ввели в рассмотрение специальные последовательности $\{\gamma_k\}_0^\infty$, названные ими „Faktorenfolge" первого рода, обладающие следующим свойством: каков бы ни был полином $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, имеющий лишь вещественные корни, полином $P_n^\gamma(z) = a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 z + \cdots + a_n\gamma_n z^n$ имеет лишь вещественные корни. Ими доказано, что для того чтобы последовательность $\{\gamma_k\}_0^\infty$ была „Faktorenfolge" первого рода, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k z^k}{k!}$ сходился во всей комплексной плоскости и чтобы функция $\varphi(z)$ имела представление

$$\varphi(z) = ce^{\sigma z} \prod_{k=0}^{\infty} (1 + \varkappa_k z),$$

где $\sigma \geqslant 0$, все $\varkappa_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k < \infty$ и c — постоянная.

Можно показать, что, если последовательность $\{\gamma_k\}_0^\infty$ есть „Faktorenfolge" первого рода и $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ конечной степени, то оператор

$$\Gamma[f(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k a_k z^k$$

имеет смысл и является $\mathfrak{B}$-оператором.

Из того, что последовательность $\mu_k{}^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\mu_0 = 1$, есть „Faktorenfolge" первого рода, следует

Теорема 2. *Если* $\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *и* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *суть функции, определенные в теореме* 1 *и удовлетворяющие неравенству* (5), *то полиномы*

$$P_n^\omega(z) = \sum_{k=0}^{n} \mu_k{}^n b_k z^k, \qquad P_n^f(z) = \sum_{k=0}^{n} \mu_k{}^n a_k z^k$$

удовлетворяют неравенству:

$$|P_n^f(x)| \leqslant |P_n^\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

Заметим, что при $n \to \infty$ $P_n f(z) \rightrightarrows f(z)$ в любой конечной области.

В связи с некоторыми исследованиями Н. Г. Чеботарева ([5]) и Л. С. Понтрягина ([6]), посвященными обобщению известной теоремы Эрмита — Биллера, мною ([7]) и, независимо от меня, М. Г. Крейном была установлена теорема, которую я приведу здесь в формулировке М. Г. Крейна, имеющей более законченный характер.

Теорема 3. *Для того чтобы целая функция конечной степени*

$$\omega(z) = P(z) + iQ(z),$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — вещественные функции, была функцией класса P, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

А) *Все корни функций $P(z)$ и $Q(z)$ вещественные, простые (кроме, быть может, общих корней) и перемежаются.*

В) *Индикаторные диаграммы функций $P(z)$ и $Q(z)$ совпадают.*

С) $Q'(x_0)P(x_0) - Q(x_0)P'(x_0) > 0$.

Комбинируя эту теорему с леммой 2, можно обобщить некоторые из известных теорем С. Н. Бернштейна об экстремальных свойствах на более широкие классы целых функций (в частности, теоремы § 9, гл. III ([2])).

Пусть $\omega(z)$ — класса P_σ и $\omega(x)/\overline{\omega}(x) = e^{i\theta}$. Если функция $\omega(x)$ имеет хотя бы один невещественный корень или положительный дефект, то функция $\theta(x)$ монотонно возрастает.

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ — вещественная целая функция конечной степени $\tau \leqslant \sigma$ и $\psi(\theta) = f(x)/|\omega(x)|$ — ограниченная функция при $(-\infty < x < \infty)$. Тогда при $|h| \leqslant \pi$*

$$\left| \left(\theta + \frac{h}{2}\right) - \psi\left(\theta - \frac{h}{2}\right) \right| \leqslant 2 \left| \sin \frac{h}{2} \right| \sup_{-\infty < x < \infty} |\psi(\theta)|. \tag{7}$$

Неравенство (7) является обобщением одного неравенства, недавно доказанного С. Н. Бернштейном (([9]), стр. 1489). Неравенство С. Н. Бернштейна получается из (7) при $\omega(x) = e^{i\sigma x}$.

Теорема 5. *Пусть функции $\omega(x)$, $f(x)$, $\theta(x)$ и $\psi(\theta)$ имеют тот же смысл, что и в теореме 4. Тогда при $|h| \leqslant 2\pi$*

$$\sup_{-\infty < \theta < \infty} \left| \int_{\theta - \frac{h}{2}}^{\theta + \frac{h}{2}} \psi(\theta)\, d\theta \right| \geqslant 2 \left| \sin \frac{h}{2} \right| \sup_{-\infty < x < \infty} |\psi(\theta)|. \tag{8}$$

При $\omega(x) = e^{i\sigma x}$ это неравенство было доказано: С. Б. Стечкиным ([10]) при условии, что $f(x)$ — тригонометрический полином, С. М. Никольским при условии $|h| \leqslant \pi$ ([11]) и С. Н. Бернштейном в общем случае ([9]).

Поступило
24 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extrémales et meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 1926. [2] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, М., 1937. [3] Н. И. Ахиезер, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, № 5 (1946). [4] G. Polya u. I. Schur, J. f. reine u. angewandte Math., 144 (1914). [5] Н. Г. Чеботарев, ДАН, 33, 483 (1941); 35, 219 (1942); 35, 251 (1942). [6] Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., 6, 115 (1942). [7] Б. Я. Левин, ДАН, 41, № 2 и № 3 (1943). [8] Н. Н. Мейман, ДАН, 40, № 2 и № 5 (1943); 53, № 1 (1946); 62, № 3 (1948). [9] С. Н. Бернштейн, ДАН, 60, № 9 (1948). [10] С. Б. Стечкин, ДАН, 60, № 9, 1511 (1948). [11] С. М. Никольский, ДАН, 60, № 9 (1948).