Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 1

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. А. БУЛГАКОВ

О ГЕОМЕТРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 25 III 1949)

Рассматривается геометрическое выражение движения в электромагнитной системе, состоящей из n неподвижных, электрически не связанных контуров с индуктивностями, все или часть которых связаны магнитным потоком.

Геометризация рассматриваемой системы осуществляется следующим образом. К координатам системы q^h (1) относят оси, заданные базисными векторами $\mathbf{r}_h$, определение которых по величине и направлению допускает известный произвол; например, их принимают единичными и ортогональными (2). Этот произвол снимается определением метрики пространства, в данном случае евклидового n-мерного.

Определим метрику кинематическим линейным элементом (3)

$$ds^2 = 2\,T\,dt^2, \tag{1}$$

где $T = \frac{1}{2} L_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k$ — кинетическая энергия системы, L_{ik} — коэффициенты собственной $(i = k)$ или взаимной $(i \neq k)$ индуктивности, q — обобщенные координаты — электрические заряды.

Или

$$ds^2 = L_{ik}\,dq^i\,dq^k. \tag{2}$$

Так как геометрически квадрат линейного элемента выражается квадратичной формой

$$ds^2 = d(\mathbf{r}_i q^i) \cdot d(\mathbf{r}_k q^k), \tag{3}$$

то из (2) и (3) следует уравнение ($r_h = \mathrm{const}$)

$$L_{ik}\,dq^i\,dq^k = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k\,dq^i\,dq^k, \tag{4}$$

однозначно определяющее базисные векторы по величине и направлению при неизменных масштабах координат.

Для системы свободных материальных точек, как это принимает Д. И. Кутилин, базисные векторы будут ортогональными и равными по величине корням квадратным из масс точек (4).

В рассматриваемом случае электромагнитной системы величины базисных векторов будут равны квадратным корням из соответствующих коэффициентов самоиндукции

$$|\mathbf{r}_i| = \sqrt{L_{ii}}, \tag{5}$$

а направляющие косинусы углов между базисными векторами равны коэффициентам электромагнитной связи K_{ik} соответствующих индуктивностей

$$\cos(\widehat{\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k}) = \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i|\,|\mathbf{r}_k|} = \frac{L_{ik}}{\sqrt{L_{ii}L_{kk}}} = K_{ik}. \tag{6}$$

При $n \leqslant 3$ направления базисных векторов можно представить как направления осей катушек индуктивностей, смещенных в реальном пространстве, соответственно коэффициентам связи между ними, подобно вариометру. Это последнее представление можно обобщить на пространство любого числа измерений.

Таким образом, магнитные свойства системы, определяемые ее конструкцией, находят при указанной интерпретации адэкватное математическое выражение в геометрической структуре пространства, заданной базисными векторами.

Движение n зарядов — координат системы — представится движением в пространстве конфигураций изображающей точки, радиус-вектор которой определяется суммой составляющих по осям

$$\mathbf{Q} = \mathbf{r}_h q^h. \tag{7}$$

Скорость изображающей точки представится вектором

$$\mathbf{V} = \frac{d}{dt}\mathbf{Q} = \mathbf{r}_h \dot{q}^h. \tag{8}$$

Контравариантные составляющие последнего дадут токи в контурах системы

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}^k = \dot{q}^i\,\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}^k = \dot{q}^k, \tag{9}$$

а ковариантные — потоки Φ_k, сцепленные с соответствующими контурами

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_k = \dot{q}^i\,\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_k = \dot{q}^i L_{ik} = \Phi_k. \tag{10}$$

Следовательно, вектор скорости изображающей точки представляет вектор тока в системе основного базиса и вектор потока в системе взаимного базиса

$$\mathbf{V} = \mathbf{r}_i\,\dot{q}^i = \dot{\mathbf{Q}}; \qquad \mathbf{V} = \mathbf{r}^k\,\Phi_k = \overrightarrow{\Phi}. \tag{11}$$

Величина вектора скорости определяется его скалярным квадратом, равным двойному запасу кинетической энергии системы

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{V} = \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_k\,\dot{q}^i\,\dot{q}^k = L_{ik}\,\dot{q}^i\,\dot{q}^k; \quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{V} = \mathbf{r}^i\cdot\mathbf{r}^k\,\Phi_i\,\Phi_k = \Phi_i\,\dot{q}^i \tag{12}$$

и изображающей точки

$$T = {}^1/_2\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}, \tag{13}$$

так как обобщенная масса изображающей точки равна единице по определению (1).

Ускорение изображающей точки представится вектором

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{r}_i\,\ddot{q}^i, \tag{14}$$

контравариантные составляющие которого равны действующим обобщенным силам e_i:

$$\mathbf{W}\cdot\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_k\ddot{q}^k = L_{ik}\ddot{q}^k = e_i; \quad \mathbf{W}\cdot\mathbf{r}_i = \mathbf{r}^i\cdot\mathbf{r}_k\frac{d\Phi_k}{dt} = \frac{d\Phi_i}{dt} = e_i. \tag{15}$$

Так как сумма составляющих по осям $\mathbf{e}_k = \mathbf{r}^k e_k$ образует вектор силы, приложенной к изображающей точке:

$$\vec{\mathscr{E}} = \mathbf{r}^k e_k, \tag{16}$$

то отсюда следует уравнение эдс, действующих в электромагнитной системе:

$$\mathbf{W} = \frac{d}{dt}\dot{\mathbf{Q}} = \frac{d}{dt}\vec{\Phi} = \vec{\mathscr{E}}, \tag{17}$$

как частный случай обобщенного второго закона Ньютона — вектор ускорения изображающей точки равен вектору действующей силы.

Поступило
9 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Ф. Миткевич, Физические основы электротехники, 1932. [2] G. Kron, The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery, 1938. [3] J. L. Synge, Trans. Roy. Soc. of London, A, 226 (1929). [4] Д. И. Кутилин, Теория конечных деформаций, М., 1947.