Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТОНКИХ ПЛИТ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 15 III 1949)

В этой работе показывается, что для тонких плит, ограниченных кусочно-прямолинейными контурами, задача об изгибе при заданных значениях на контуре прогиба и изгибающего момента (эта задача обычно называется смешанной задачей теории тонких плит) приводится к последовательному определению двух аналитических функций комплексного переменного по их граничным значениям, причем первая из этих функций находится в результате решения задачи Дирихле, а вторая — в результате решения задачи Римана — Гильберта [1]. В качестве примера на применение получающегося метода решения указанной задачи теории тонких плит дается решение задачи об изгибе тонкой прямоугольной плиты, свободно опертой по краям, силами, нормальными к ее серединной плоскости.

Пусть G — область в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, совпадающая с серединной плоскостью тонкой плиты из изотропного однородного материала толщиною $2h$, L — ее граница, σ — длина дуги L, отсчитываемая от некоторой начальной точки в направлении положительного обхода L. Пусть (x, y, w) — правая система координат. Тогда, если через $q = q(x, y)$ обозначить нормальные усилия, приложенные к поверхности плиты на единицу площади, а через $w = w(x, y)$ — прогиб серединной плоскости плиты, то для определения $w = w(x, y)$, как известно, имеет место уравнение

$$\Delta\Delta w = q/D \quad (\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2), \tag{1}$$

где $D = 2Eh^3/3(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона.

Изгибающий момент M_ν, скручивающий момент $H_{\nu t}$ и перерезывающая сила N_ν, действующие на единицу длины замкнутой кривой Γ с внешней нормалью ν и положительным направлением касательной t, лежащей в области G, выражаются через прогиб $w = w(x, y)$ следующим образом [2]:

$$M_\nu = -{}^1/_2 D\{(1+\mu)\Delta w + (1-\mu)[(w_{xx} - w_{yy})\cos 2\alpha + 2w_{xy}\sin 2\alpha]\}, \tag{2}$$

$$H_{\nu t} = -{}^1/_2 D(1-\mu)[(w_{yy} - w_{xx})\sin 2\alpha + 2w_{xy}\cos 2\alpha], \tag{3}$$

$$N_\nu = -D\,\partial\Delta w/\partial\nu, \tag{4}$$

где α — угол, составленный нормалью ν с осью x.

Пусть $\omega = \omega(x, y) = \omega(z)$ — какое-либо частное решение уравнения (1), непрерывное на L вместе со своими частными производными по x и y до четвертого порядка *. Тогда общим решением уравнения (1)

* При достаточно общих предположениях относительно $q(x, y)$ можно, например, положить $\omega = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G \frac{r^2 \ln r}{4D} q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \quad (r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2})$ [3].

будет

$$w = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}) + \omega, \tag{5}$$

где $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — произвольные аналитические в области G функции от $z = x + iy$; $\bar{\varphi}(\bar{z})$ и $\bar{\chi}(\bar{z})$ — функции, сопряженные с функциями $\varphi(z)$ и, соответственно, $\chi(z)$, причем функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ такие, что

$$\varphi(0) = 0, \quad \operatorname{Im}\varphi'(0) = (0), \quad \operatorname{Im}\chi(0) = 0 \tag{6}$$

(Im — мнимая часть).

Как следствие равенства (5) получаем

$$^1/_2(\partial w/\partial x + i\,\partial w/\partial y) = \varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) + d(\omega)/d\bar{z}, \tag{7}$$

где $\psi(z) = \chi'(z)$, символ $d(f)/dz$ определяется равенством

$$d(f)/dz = {}^1/_2(\partial f/\partial x - i\,\partial f/\partial y) \tag{8}$$

(f — любая функция комплексного переменного, вещественная и мнимая части которой имеют частные производные по x и y *).

Отметив тождество

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{d(f)}{dz}e^{i\alpha} + \frac{d(f)}{d\bar{z}}e^{-i\alpha}, \tag{9}$$

имеющее место для любой функции f, вещественная и мнимая части которой как функции переменных x и y имеют полные дифференциалы, из равенства (7) легко получаем следующую формулу

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - i\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial \nu}\right) = \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) + \frac{1}{4}\Delta\omega - \left[z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}) + \frac{d^2(\omega)}{d\bar{z}^2}\right]e^{-i2\alpha}, \tag{10}$$

где

$$\frac{d^2(\omega)}{d\bar{z}^2} = \frac{d(d(\omega)/d\bar{z})}{d\bar{z}} = \frac{\omega_{xx} - \omega_{yy}}{4} + i\frac{2\omega_{xy}}{4}. \tag{11}$$

Записав равенства (2), (3), (4) в комплексной форме

$$M_\nu + iH_{\nu t} = -{}^1/_2 D(1+\mu)\Delta w - {}^1/_2 D(1-\mu)[w_{xx} - w_{yy} + i2w_{xy}]e^{-i2\alpha},$$
$$N_x + iN_y = -2D\,d(\Delta w)/d\bar{z}$$

и применяя равенство (11) к функции $w = w(x, y)$, получаем следующие формулы:

$$M_\nu + iH_{\nu t} = -2D(1+\mu)\left[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) + \frac{1}{4}\Delta\omega\right] -$$
$$-2D(1-\mu)\left[z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}) + \frac{d^2(\omega)}{d\bar{z}^2}\right]e^{-i2\alpha}, \tag{12}$$
$$N_x + iN_y = -8D[\varphi'(z) + {}^1/_4\, d(\Delta\omega)/d\bar{z}]. \tag{13}$$

Как следствие формул (10) и (12) имеем равенства

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{1}{2D(1-\mu)}M_\nu = \frac{2}{1-\mu}\left[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) + \frac{1}{4}\Delta\omega\right],$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial\nu} = -\frac{1}{D(1-\mu)}H_{\nu t}. \tag{14}$$

---

* Этот символ $d(f)/dz$ мы иногда называем обобщенной производной функции $f(z)$ по комплексному переменному $z = x + iy$ ([4]).

Из первого из этих равенств и из равенства (10) получаем следующие важные формулы

$$\operatorname{Re}\varphi'(z)=\frac{1}{8}\left[(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\frac{1}{D}M_\nu-\Delta\omega\right], \tag{15}$$

$$\operatorname{Re}[\psi'(z)e^{i2\alpha}]=-\frac{1}{4}\left[(1+\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\frac{1}{D}M_\nu\right]-\operatorname{Re}\left[\left(z\bar{\varphi}''(\bar{z})+\frac{d^2(w)}{d\bar{z}^2}\right)e^{-i2\alpha}\right]. \tag{16}$$

(Re — вещественная часть).

Формулы (15) и (16) показывают, что если граница L области G есть кусочно-прямолинейный контур и если на этом контуре заданы значения прогиба $w=w(\sigma)$ и изгибающего момента $M_\nu=m(\sigma)$, то для определения функций $\varphi'(z)$ и $\psi'(z)$ на контуре L, если речь не идет об его угловых точках, имеют место равенства

$$\operatorname{Re}\varphi'(z)=\frac{1}{8}\left[(1-\mu)\frac{\partial^2 w(\sigma)}{\partial\sigma^2}-\frac{1}{D}m(\sigma)\right]-\frac{1}{8}[\Delta\omega]_L, \tag{17}$$

$$\operatorname{Re}[\psi'(z)e^{i2\alpha}]=-\frac{1}{4}\left[(1+\mu)\frac{\partial^2 w(\sigma)}{\partial\sigma^2}+\frac{1}{D}m(\sigma)\right]-$$

$$-\operatorname{Re}\left[\left(z\bar{\varphi}''(\bar{z})+\frac{d^2(\omega)}{d\bar{z}^2}\right)e^{-i2\alpha}\right]_L, \tag{18}$$

где через $[\;\;]_L$ обозначены значения соответствующей функции, стоящей в квадратных скобках, на контуре L. В частности, в случае свободно опертой плиты, т. е. при $w(\sigma)=0$, $m(\sigma)=0$, равенства (17) и (18) принимают вид

$$\operatorname{Re}\varphi'(z)=-\frac{1}{8}[\Delta\omega]_L, \tag{17'}$$

$$\operatorname{Re}[\psi'(z)e^{i2\alpha}]=-\operatorname{Re}[(z\bar{\varphi}''(\bar{z})+d^2(\omega)/d\bar{z}^2)e^{-i2\alpha}]_L. \tag{18'}$$

Таким образом, в случае, когда область G ограничена кусочно-прямолинейным контуром, при заданных на контуре значениях прогиба и изгибающего момента функция $\varphi'(z)$ определяется из равенства (17) в результате решения задачи Дирихле, а затем функция $\psi'(z)$ определяется из равенства (18) как решение задачи Римана — Гильберта.

Пусть теперь область G есть прямоугольник, т. е. рассмотрим плиту, имеющую форму прямоугольника. Будем считать, что края плиты свободно оперты, т. е. $w(\sigma)=0$, $m(\sigma)=0$. Считая, что вершины A_1, A_2, A_3, A_4 прямоугольника G имеют аффиксы $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a+ib$, $-\frac{1}{2}a+ib$ и, соответственно, $-\frac{1}{2}a$ $(a>0, b>0)$, из равенства (17'), учитывая, что $\operatorname{Im}\varphi'(0)=0$, получаем

$$\varphi'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}-\frac{1}{8}[\Delta\omega]_L\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta, \tag{19}$$

где $\zeta=\rho e^{i\theta}=\frac{\operatorname{sn}z-i}{\operatorname{sn}z+i}$ — функция, конформно отображающая прямоугольник G на круг $|\zeta|<1$, $\operatorname{sn}z$ — эллиптический синус с периодами $2a$ и $2bi$.

Из равенства (18'), предполагая, что $d^2(\omega)/d\bar{z}^2$ как функция от θ непрерывна на окружности $|\zeta|=1$, а $d[\Delta\omega]_L/d\theta$ как функция от θ

удовлетворяет условию Гельдера на этой окружности, из равенства (18') получаем:

$$\psi'(z) = \psi_0'(z) + iC', \tag{20}$$

где C' — неопределенная вещественная постоянная,

$$\psi_0'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\operatorname{Re}\left[z\overline{\varphi''}(\overline{z}) + \frac{d^2(\omega)}{d\overline{z}^2}\right]_L \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta. \tag{21}$$

Полагая

$$\psi(z) = \int_0^z \varphi'(z)\,dz, \quad \psi_0(z) = \int_0^z \psi_0'(z)\,dz, \quad \chi_0(z) = \int_0^z \psi_0(z)\,dz \tag{22}$$

и подставляя эти равенства в равенство (5), получаем

$$w = \overline{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi}(\overline{z}) + \chi_0(z) + \overline{\chi_0}(\overline{z}) + {}^1/_2\, iC'(z^2 - \overline{z}^2) + $$
$$+ A'(z+\overline{z}) + iB'(z-\overline{z}) + \omega(z)\ ^*, \tag{23}$$

где A', B', C', — вещественные постоянные. Полагая $z_1 = {}^1/_2\, a + i\,{}^1/_2\, b$, $z_2 = ib$, $z_3 = -{}^1/_2\, a + {}^1/_4\, b$, из равенства (23) для определения постоянных A',B',C', получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$A'a - B'b - C'\,{}^1/_2\, ab = -\overline{z}_1\varphi(z_1) - z_1\overline{\varphi}(\overline{z}_1) - \chi_0(z_1) - \overline{\chi}_0(\overline{z}_1) - \omega(z_1), \tag{24}$$

$$B'2b = \overline{z}_2\varphi(z_2) + z_2\overline{\varphi}(\overline{z}_2) + \chi_0(z_2) + \overline{\chi}_0(\overline{z}_2) + \omega(z_2), \tag{25}$$

$$-A'a - B'\,{}^1/_2\, b + C'\,{}^1/_4\, ab = -\overline{z}_3\varphi(z_3) - z_3\overline{\varphi}(\overline{z}_3) - \chi_0(z_3) - \overline{\chi}_0(\overline{z}_3) - \omega(z_3). \tag{26}$$

Из этой системы уравнений постоянные A', B', C' однозначно определяются, ибо определитель этой системы равен $-{}^1/_2\, a^2b^2$ и, следовательно, отличен от нуля.

Таким образом, задача об изгибе опертой прямоугольной плиты решена. При этом изгибающий момент M_ν, скручивающий момент $H_{\nu t}$, перерезывающие силы N_x и N_y и прогиб w этой плиты определяются равенствами

$$M_\nu + iH_{\nu t} = -2D(1+\mu)\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\overline{z}) + \frac{1}{4}\Delta\omega\right] -$$
$$-2D(1-\mu)\left[z\overline{\varphi''}(\overline{z}) + \overline{\psi}_0(\overline{z}) + iC' + \frac{d^2(\omega)}{d\overline{z}^2}\right]e^{-i2\alpha}, \tag{27}$$

$$N_x + iN_y = -8D\left[\overline{\varphi''}(\overline{z}) + {}^1/_4\, d(\Delta\omega)/d\overline{z}\right], \tag{28}$$

$$w = \overline{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi}(\overline{z}) + \chi_0(z) + \overline{\chi}_0(\overline{z}) + \frac{i}{2}C'(z^2 - \overline{z}^2) +$$
$$+ A'(z+\overline{z}) + iB'(z-\overline{z}) + \omega(z), \tag{29}$$

где функции $\varphi'(z)$, $\psi_0'(z)$, $\varphi(z)$, $\psi_0(z)$, $\chi_0(z)$ определяются равенствами (19), (21) и (22), а постоянные A', B', C' находятся из системы линейных алгебраических уравнений (24), (25), (26).

Поступило
15 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946, стр. 279—283. [2] А. И. Лурье, Прикладн. матем. и мех., 4, в. 1 (1940). [3] G. Lauricella, Acta Math., 32, 204 (1909). [4] Г. Н. Положий, ДАН, 63, № 6 (1948).

* Здесь мы считаем для определенности $\omega(0) = 0$.