Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

В. Р. ФРИДЛЕНДЕР

О НАИМЕНЬШИХ СТЕПЕННЫХ НЕВЫЧЕТАХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 III 1949)

В теории распределения степенных невычетов одной из основных проблем является гипотеза акад. И. М. Виноградова о том, что

$$\lim_{D\to\infty}\frac{\ln T(D)}{\ln D}=0 \text{ равномерно по } \chi, \tag{1}$$

где $\chi(n)$ — примитивный неглавный характер $(\bmod D)$, $T(D)$ — наименьшее положительное число, для которого $\chi(T(D))\neq 0,1$.

В отношении наименьших квадратичных невычетов по простым модулям $T_2(p)$ имеет место

Теорема 1.

$$T_2(p)=\Omega(\ln p).$$

Доказательство. Применяя закон взаимности символов Лежандра, без труда устанавливаем:

1°. $T_2(p)$ — число простое.

2°. Все простые числа p, для которых $T_2(p)=p_k$ (k-му по порядку простому числу), расположены в $s_k=\frac{\varphi(4p_k!)}{2^k}$ «простых» прогрессиях* с разностью $4p_k!$, где ради краткости положено $p_k!=2\cdot 3\cdot 5\ldots p_k$.

Обратно, все простые числа указанных прогрессий имеют $T_2(p)=p_k$.

3°. Оценим наименьшее простое число p, для которого $T_2(p)=p_k$.

Согласно 2° и теореме Ю. В. Линника о том, что наименьшее простое число в арифметической прогрессии $Dx+l$, $(D,l)=1$, не превосходит D^{C_0}, будем иметь: $p<(4p_k!)^{C_0}$, или

$$\ln p<C_0(\ln 4+\ln p_k!)\leqslant 3C_0\ln p_k!\leqslant C_1p_k=\frac{1}{C}T_2(p).$$

Отсюда

$$T_2(p)>C\ln p,$$

что и доказывает теорему.

Замечание. Из справедливости расширенной гипотезы Римана следовало бы:

$$T(p)\ll\ln^2 p.$$

* „Простыми" будем называть прогрессии вида $kx+l$ где $(k,l)=1$.

Распространение настоящей теоремы на $T_n(p)$ (наименьшие невычеты n-й степени $(\mathrm{mod}\, p)$) затрудняется недоказанностью вышеупомянутой теоремы Линника для алгебраических полей, в частности для полей деления круга.

В этом направлении можно указать теорему иного рода, являющуюся непосредственным обобщением теоремы Ю. В. Линника ([2,3]).

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Назовем исключительными числами n-й степени ($n \geqslant 2$) те простые числа p, для которых $p - 1 \equiv 0 \pmod n$, $T_n(p) > p^{\varepsilon}$.*

Тогда, при любом достаточно большом N и фиксированном $\alpha > 0$, количество исключительных чисел n-й степени на сегменте $[N, N^{1+\alpha}]$ не превосходит

$$\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{n-1} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s!\,(s+2)^s,$$

где

$$s = \left[\frac{2(1+\alpha)}{\varepsilon} + 1\right].$$

Доказательство проводится аналогично рассуждениям Ю. В. Линника. В теореме Ю. В. Линника ([2]) о „большом решете" почти тривиально получаем уточнение

$$I < \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \frac{X}{Z} \frac{1-\tau_x}{\tau_x \sqrt{\tau_x}},$$

с помощью которого применением леммы И. М. Виноградова ([1]) получается указанная теорема.

Укажем еще некоторое достаточное условие для верности известной гипотезы И. М. Виноградова, упомянутой в начале статье (1). Введем следующие обозначения:

$$S(N_1, N_2) = \sum_{n=N_1}^{N_2} \chi(n)\tau(n), \quad \tau(n) \text{ — число делителей } n.$$

Теорема 3. *Если для любых N_1, N_2 под условием*

$$De^{-(\ln D)^{2/3}} \leqslant N_1 < N_2 \leqslant De^{(\ln D)^{2/3}}$$

верна оценка

$$S(N_1, N_2) \ll D^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \text{при любом } \varepsilon > 0, \tag{2}$$

то гипотеза (1) *верна* *.

Заметим, что оценка (2) вытекает из гипотезы Римана для $L(s, \chi)$; ее неверность обозначала бы неверность гипотезы Римана.

Поступило
10 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Виноградов, Изв. Отд. мат. и ест. наук АН СССР, 20, 47 (1926). [2] Ю. В. Линник, ДАН, 30, 4, 285 (1941). [3] Ю. В. Линник, ДАН, 36, 4—5, 131 (1942).

* Настоящая теорема возникла в беседе с проф. Ю. В. Линником.