Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

А. ФЕТ

КОЛЬЦО ГОМОЛОГИЙ ПРОСТРАНСТВА ЗАМКНУТЫХ СПРЯМЛЯЕМЫХ КРИВЫХ НА СФЕРЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 24 III 1949)

Пространство Ω замкнутых спрямляемых кривых на сфере S^n изучалось Морсом и Л. А. Люстерником. Числа Бетти (mod 2) этого пространства для $n=2$, найденные Морсом, равны 1, 1, 2, 1, 2, 1, ... (начиная с одномерного). Соответствующие базисные Δ-циклы (mod 2) обозначим

$$q_1, u_2, u_3, q_3, u_4, u_5, q_5, \ldots, \tag{1}$$

где q_{2k-1}, в обозначениях Морса, есть Λ_{12}^k ([4], гл. IX). Геометрический вид Λ_{12}^k указан Морсом. Обозначим $Q^{2k-1}, U^{2k}, U^{2k+1}$ двойственные ∇-циклы, так что не равны нулю только произведения:

$$Q^{2k-1}\cdot q_{2k-1}=1, \quad U^{2k}\cdot u_{2k}=1, \quad U^{2k+1}\cdot u_{2k+1}=1. \tag{2}$$

Л. А. Люстерник изучил для геометрических целей (теорема о трех геодезических) произведения $(Q^1)^2$, $(Q^1)^3$, задавая Q^1 эффективно [3]. Мы здесь решаем для случая двумерной сферы поставленную Л. А. Люстерником задачу определения кольца гомологий пространства Ω (по mod 2).

Чтобы обнаружить негомологичность нулю ∇-цикла $A\times B$, мы рассматриваем это произведение на многообразиях или псевдомногообразиях, вложенных в Ω, на которых вычисление произведений сводится к пересечениям Δ-циклов. Исследование Δ-циклов опирается на результаты Морса.

1. Лемма. *Пусть M_n — многообразие с краем Γ, $M_n^0 = M\setminus\Gamma$ — открытый комплекс (см. [1]); $\{z_r^i\}$, соотв. $\{z_{n-r}^{i0}\}$,— дуальные Δ-базы на M_n, соотв. M_n^0, $\{Z_i^r\}$, $\{Z_{i0}^{n-r}\}$ — двойственные ∇-базы. Если $Z^r\sim\sum\limits_j\alpha_j Z_j^r$ на M_n, $Z_0^{n-r}\sim\sum\limits_j\beta_j Z_{j0}^{n-r}$ на M_n^0, то $Z^r\times Z_0^{n-r}=\sum\alpha_j\beta_j$.*

Доказательство — сведение к результатам Л. С. Понтрягина [2].

2. Фиксируем на сфере S_2 точку A и n попарно различных замкнутых кривых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (не окружностей), проходящих через A, с заданными направлениями. В A проведем направленную касательную T, и через нее плоскость под углом τ к нормали в A ($-\pi/2\leqslant\tau\leqslant\pi/2$). Окружность пересечения этой плоскости с S_2 направим вдоль T и обозначим (τ). Замкнутую кривую

$$\tau_1\lambda_1\tau_2^{-1}\lambda_2\ldots\tau_{n-1}^{\pm 1}\lambda_{n-1}\tau_n^{\mp 1}\lambda_n, \quad \text{соотв.}\ \tau_1\lambda_1\tau_2\lambda_2,\ldots,\tau_n\lambda_n,$$

назовем n-окружностью 1-го, соотв. 2-го рода.

При нечетном $n = 2k - 1$ все $(2k - 1)$-окружности 1-го, соотв. 2-го, рода образуют Δ-цикл v'_{2k-1}, соотв. v_{2k-1}, — гомеоморфный образ тора. Вращая этот цикл вокруг нормали к сфере в A на угол ϑ, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, и производя деформацию $\lambda_i \to \lambda^{-1}_{2k-i}$, образуем Δ-цикл v'_{2k}, соотв. v_{2k}, — гомеоморфный образ многообразия, получаемого из произведения $v_{2k-1} \times [0 \leqslant \vartheta \leqslant 1]$ отождествлением $(\tau_1, \ldots, \tau_{2k-1}; 0) = (-\tau_{2k-1}, \ldots, \tau_1; \pi)$.

Введем обозначения t_r^i для базисных r-мерных подторов тора v_{2k-1}; также обозначим $\vartheta t_r^i = t_r^i \times [0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi]$, если комплекс $t_r^i \times \pi = t_r^i \times 0$, и $\vartheta^2 t_r^i = t_r^i \times [0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi]$ в противном случае. Пусть r нечетно. Легкими, хотя несколько громоздкими вычислениями, с применением теоремы Л. С. Понтрягина о снятии цикла, находим, что Δ^r-база многообразия v_{2k} состоит из циклов вида: 1) t_r^i; 2) ϑt_r^i; 3) $\vartheta^2 t_r^i$. Из этих циклов составляем дуальные базы в размерностях r, $2k - r$. Путем деформации (сначала сводя все λ_i в A) устанавливаем:

$$\vartheta t_r^i \sim 0, \quad \vartheta^2 t_r^i \sim 0, \quad t_r^i \sim \Lambda_{12}^{\frac{r+1}{2}} \text{ на } \Omega \pmod 2. \tag{3}$$

Из (2) и (3) находим: $Q^r \cdot \vartheta t_r^i = 0$, $Q^r \cdot \vartheta^2 t_r^i = 0$, $Q^r \cdot t_r^i = 1$.

Применяя лемму п. 1 (в случае $\Gamma = 0$) и таблицу дуальных баз на v_{2k}, найдем сначала $(Q^{2k-1} \times Q^1) \cdot v_{2k} = 1$, откуда $v_{2k} \not\sim 0$ на Ω; затем так же выводим:

$$(Q^r \times Q^{2k-r}) \cdot v_{2k} = \left[C_{2k}^{\frac{r-1}{2}} \right]_2, \quad \text{где } [\gamma]_2 \text{ — вычет } \gamma \pmod 2. \tag{4}$$

Из (4) и единственности $2k$-мерного цикла (см. ([1])) имеем:

$$Q^r \times Q^{2k-r} = \left[C_{2k}^{\frac{r-1}{2}} \right]_2 U^{2k}. \tag{5}$$

После стягивания λ_i в A все двумерные базисные подторы торов t_3^i уничтожаются (mod 2). Отсюда $Q^1 \times Q^1 \sim 0$ на t_3^i,

$$[Q^1]^3 \cdot t_3^i = 0 \quad \text{и} \quad Q^{2k-3} \times [Q^1]^3 = 0. \tag{6}$$

v'_{2k} легко деформировать в v_{2k} на Ω, поворачивая окружность вокруг нормали в A на π. Поэтому

$$v'_{2k} \not\sim 0, \quad v'_{2k} \sim v_{2k} \sim u_{2k} \text{ на } \Omega. \tag{7}$$

3. Возьмем на S_2 диаметрально противоположные точки A, B; соединяющие их меридианы занумеруем параметром τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$. Мы будем рассматривать полимеридианы ([3]), обозначая их $(\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_{2k})$, $0 \leqslant \tau_i \leqslant 2\pi$ $(i = 1, \ldots, 2k)$. Множество w_{2k} всех $2k$-меридианов есть образ $2k$-мерного тора T_{2k} с координатами τ_i в пространстве Ω при отображении J „по координатам“. Отображение J можно рассматривать как отождествление на T_{2k}. За исключением не более чем $(2k-2)$-мерного особого множества F, точки w_{2k} имеют окрестности, гомеоморфные $2k$-мерному шару. Обозначим $G = w_{2k} \setminus F$, $\tilde{F} = J^{-1}(F)$, $\tilde{G} = J^{-1}(G)$. Вращая w_{2k} на ϑ, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, вокруг диаметра сферы, нормального к AB, получим цикл w_{2k+1}. Легко видеть, что w_{2k} и

w_{2k+1} — псевдомногообразия, следовательно, циклы Ω. Достаточно малая полиэдральная окрестность $V(F')$ имеет те же Δ-группы, что F', поэтому ∇-цикл U^{2k}, рассматриваемый на w_{2k+1}, можно снять с $\bar{V}$ (здесь F' — особое множество w_{2k+1}, $\dim F' \leqslant 2k-1$). Дальше рассматривается гомологичный U^{2k} ∇-цикл U_0^{2k} открытого комплекса $w_{2k+1} \setminus \bar{V} = M_{2k+1}^0$. $M_{2k+1} = \overline{M_{2k+1}^0}$ — многообразие с краем.

Очевидно,

$$(U^{2k} \times Q^1)\cdot w_{2k+1} = (U_0^{2k} \times Q^1)\cdot M_{2k+1}^0, \tag{8}$$

где справа Q^1 рассматривается на M_{2k+1}. Обозначим циклы на w_{2k+1}:

$$m_{2k} = (\vartheta = 0); \quad r_{2k} = (\tau_1 = 0); \quad l_1 = (\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_{2k-1} = 0, \ \tau_{2k} = \pi);$$
$$r_1 = (\tau_1 = \ldots = \tau_{2k-1} = 0, \ \vartheta = 0).$$

Будем считать, что r_1 деформацией переведен на M_{2k+1} (по w_{2k+1}). Обозначим $m_1 = l_1 + r_1$, $m_{2k}^0 = m_{2k} \cap M_{2k+1}^0$, $r_{2k}^0 = r_{2k} \cap M_{2k+1}^0$.

На M_{2k+1}^0, соотв. M_{2k+1}, имеем

$$\begin{aligned} m_{2k}^0 \times m_1 = 1, \quad m_{2k}^0 \times r_1 = 0,\\ r_{2k}^0 \times m_1 = 0, \quad r_{2k}^0 \times r_1 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Рассматривая $\tilde{G}$ как накрывающую для G, можно показать, что одномерный Δ-базис M_{2k+1} составляют m_1, r_1 и $x_1^j \in \Delta_1(\Gamma)$, $1 \leqslant j \leqslant p$, где $\Gamma = (0 \leqslant \tau_i \leqslant \pi \ (i = 1, \ldots, 2k), \ \vartheta = 0)$. Так как Γ стягивается в точку на w_{2k+1}, то $x_1^j \sim 0$ на Ω $(j = 1, \ldots, p)$.

Вводя двойственные циклы x_{2k}^{j0}, запишем дуальные базы на M_{2k+1}^0, соотв. M_{2k+1}:

$$m_{2k}^0 \mid m_1, \quad r_{2k}^0 \mid r_1, \quad x_{2k}^{0j} \mid x_1^j. \tag{10}$$

Легко деформировать r_1 и l_1 в v_1, а m_{2k} в v'_{2k}, так что

$$Q^1 \cdot r_1 = Q^1 \cdot l_1 = 1. \tag{11}$$

Пользуясь (7), (4) и (5), найдем

$$U_0^{2k} \cdot m_{2k}^0 = 1. \tag{12}$$

Из леммы п. 1 и (9—12) выводим:

$$(U_0^{2k} \times Q^1)\cdot M_{2k+1}^0 = 1,$$

откуда, в силу (8),

$$U^{2k} \times Q^1 \not\sim 0 \ \text{на} \ \Omega. \tag{13}$$

4. Обозначая α, β вычеты (mod 2), имеем, по (1):

$$U^{2k} \times Q^1 = \alpha U^{2k+1} + \beta Q^{2k+1}. \tag{14}$$

Все двумерные базисные подторы v_{2k+1} гомологичны нулю на Ω, поэтому $Q^1 \times Q^1 \sim 0$ на v_{2k+1}, $(U^{2k} \times Q^1) \cdot q_{2k+1} = [Q^{2k-1} \times \times (Q^1 \times Q^1)] \cdot v_{2k+1} = 0$; умножая (14) на q_{2k+1}, найдем поэтому $\beta = 0$. Но $\alpha \neq 0$ по (13). Значит,

$$U^{2k} \times Q^1 = U^{2k+1}. \tag{15}$$

5. Из (5), (6) и (15) следует

Теорема 1. *Кольцо гомологий пространства Ω определяется таблицей умножения* ($k, l \geqslant 1$):

$$Q^{2k-1} \times Q^{2l-1} = [C_{k+l-2}^{k-1}]_2 U^{2(k+l)-2},$$
$$Q^{2l-1} \times U^{2k} = [C_{k+l-2}^{k-1}]_2 U^{2(k+l)-1},$$
$$U^{2k} \times U^{2l} = U^{2k+1} \times Q^{2l-1} = U^{2k+1} \times U^{2l} = U^{2k+1} \times U^{2l+1} = 0.$$

Образующими кольца служат Q^{2k-1}, $k \geqslant 1$. Длина ([5]) пространства Ω равна 3.

Назовем повернутую на ϑ вокруг нормали в A k-окружность, в которой все λ_i сведены в A, повернутой k-окружностью ($0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$). Легко доказывается теорема о нормальных формах.

Теорема 2. *Нормальная форма цикла q_{2k-1} состоит из всех $2k-1$-окружностей 1-го или 2-го рода. Нормальная форма цикла u_{2k} состоит из всех $2k$-окружностей 1-го рода или из всех повернутых $(2k-1)$-окружностей 1-го или 2-го рода.*

Нормальная форма цикла u_{2k+1} состоит из всех повернутых $2k$-окружностей 1-го рода.

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
22 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Изв. АН СССР, сер. матем., № 6 (1942). [2] Глезерман и Л. С. Понтрягин, Усп. матем. наук (1947). [3] Л. А. Люстерник, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 19 (1947). [4] M. Morse, Calculus of Variations in the Large, 1934. [5] С. Фролов и Л. Эльсгольц, Матем. сб., 42, № 5 (1925).