Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 3

*МАТЕМАТИКА*

Х. Р. СУЛЕЙМАНОВА

# СТОХАСТИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 III 1949)*

Стохастические матрицы, нашедшие себе существенное применение в теории цепей Маркова, впервые были подробно исследованы В. И. Романовским (2).

В работах И. Дмитриева и Е. Дынкина (1) дается решение (неполное) задачи, поставленной акад. А. Н. Колмогоровым, об определении области в круге $|\lambda| = \mu < 1$, состоящей из характеристических чисел всевозможных стохастических матриц $n$-го порядка.

В настоящей работе, в отличие от работ И. Дмитриева и Е. Дынкина, не исследуется область изменения отдельного характеристического числа, а устанавливаются некоторые результаты, связанные с выяснением тех условий, при которых заданная совокупность $n$ чисел является совокупностью характеристических чисел некоторой стохастической матрицы $n$-го порядка.

Как известно, матрица $\Phi = \| \varphi_{ik} \|_1^n$ называется стохастической, если $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{ik} = 1$, $\varphi_{ik} \geqslant 0$, и положительной стохастической, если $\varphi_{ik} > 0$ $(i, k = \overline{1, n})$.

Матрица $n$-го порядка называется матрицей простой структуры, если она имеет $n$ линейно независимых собственных векторов.

Теорема 1. *Для того чтобы существовала положительная стохастическая матрица $n$-го порядка простой структуры, имеющая характеристическими числами*

$$1, \quad \lambda_{2k-1} = \alpha_k + i\beta_k, \quad \lambda_{2k} = \alpha_k - i\beta_k \quad (k = \overline{1, q}),$$

$$\lambda_k = \alpha_k \, (k = \overline{2q+1, n-1}), \quad |\lambda_k| < 1 \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

*необходимо и достаточно существование (хотя бы одного) полиэдра $Q_{n-1}$ $(n-1)$-го измерения, переходящего строго внутрь себя при аффинном преобразовании $f$ с квазидиагональной матрицей:*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_q & \beta_q \\ -\beta_q & \alpha_q \end{pmatrix}, \alpha_{2q+1}, \ldots, \alpha_{n-1} \right\}.$$

Доказательство теоремы основано на рассмотрении системы собственных векторов

$$X = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}\}$$

($\mathbf{x}_j$ соответствует характеристическому числу $\lambda_j$ $(j = \overline{0, n-1})$), системы действительных векторов

$$Z = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n\},$$

где

$$\mathbf{z}_j = (v_{j0}, w_{j1}, v_{j1}, w_{j2}, \ldots, v_{jq}, v_{jq+1}, \ldots, v_{jn-1}),$$

$$\mathbf{v}_k + i\mathbf{w}_k = \mathbf{x}_{2k-1}, \quad \mathbf{v}_k - i\mathbf{w}_k = \mathbf{x}_{2k} \quad (k = \overline{1, q}),$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{x}_k, \quad (k = \overline{2q+1, n-1}), \quad 2q \leqslant n-1.$$

Величины

$$\xi_0^{(j)} = \sum_{t=1}^{n} \varphi_{jt} v_{t0} = v_{j0},$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_{2k-1}^{(j)} &= \sum_{t=1}^{n} \varphi_{jt} w_{tk} = \alpha_k w_{jk} + \beta_k v_{jk}, \\ \xi_{2k}^{(j)} &= \sum_{t=1}^{n} \varphi_{jt} w_{tk} = -\beta_k w_{jk} + \alpha_k v_{jk}, \end{aligned}\right\} \quad (k = \overline{1, q})$$

$$\xi_k^{(j)} = \sum_{t=1}^{n} \varphi_{jt} v_{tk} = \alpha_k v_{jk} \quad (k = \overline{2q+1, n-1}), \quad j = \overline{1, n},$$

можем рассматривать как координаты центров масс систем $\Phi_j = \{\varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \ldots, \varphi_{jn}\}$ $(j = \overline{1, n})$, помещенных в концах векторов системы $Z$.

Точки с радиусами-векторами $\vec{\xi}^{(j)}$ и $\mathbf{z}_j$ образуют соответственно $n$-мерные полиэдры $\Xi_n$ и $Z_n$.

Если полиэдры $Q_{n-1}$ и $P_{n-1}$ суть проекции полиэдров $Z_n$ и $\Xi_n$ на ту гиперплоскость, которая образуется последними $n-1$ координатными осями, то $P_{n-1} = f(Q_{n-1})$ и $P_{n-1} \subset Q_{n-1}$ *, т. е. полиэдр $Q_{n-1}$ обладает указанным в теореме свойством.

Наоборот, если существует полиэдр, обладающий этим свойством, то соответствующая матрица вполне определена „барицентрическими координатами“ вершин полиэдра $P_{n-1}$ относительно полиэдра $Q_{n-1}$.

Легко видеть, что условием существования произвольной стохастической матрицы $\Phi = \| \varphi_{ik} \|_1^n$ $(\varphi_{ik} \geqslant 0)$ с заданными характеристическими числами является снова существование $(n-1)$-мерного полиэдра $Q_{n-1}$, для которого имеет место соотношение:

$$f(Q_{n-1}) = P_{n-1} \subseteq Q_{n-1}.$$

Пользуясь теоремой 1, можно установить следующее основное положение:

Теорема 2. *Для того чтобы совокупность $n$ действительных чисел*

$$E_n = \{1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}\}, \quad \textit{где } |\lambda_i| = \mu_i < 1 \quad (i = \overline{1, n-1}), \qquad (1)$$

* Символом $\subset$ обозначаем, что полиэдр $P_{n-1}$ лежит внутри полиэдра $Q_{n-1}$, а символом $\subseteq$ обозначаем, что полиэдр $P_{n-1}$ лежит в полиэдре $Q_{n-1}$.

*была совокупностью характеристических чисел некоторой положительной стохастической матрицы n-го порядка, достаточно, чтобы сумма модулей отрицательных чисел совокупности $E_n$ была меньше единицы.*

Из теоремы 2, в частности, следует, что для произвольной совокупности $n$ действительных чисел (1), среди которых имеется не больше, чем одно отрицательное число $\lambda_i$ ($|\lambda_i| < 1$), всегда существует положительная стохастическая матрица $n$-го порядка, имеющая данную совокупность чисел своими характеристическими числами.

Следствие. *Для того чтобы совокупность n действительных чисел* (1), *где все* $\lambda_i < 0$, *была совокупностью характеристических чисел некоторой положительной стохастической матрицы, необходимо и достаточно выполнение неравенства* $\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i < 1$.

Необходимость этого условия следует из положительности суммы диагональных элементов данной матрицы.

В общем случае условие теоремы 2 является необходимым при $n \leqslant 4$ и уже не является необходимым при $n = 5$.

С помощью теоремы 2 легко доказываются следующие теоремы для произвольных стохастических матриц.

Теорема 3. *Для того чтобы совокупность*

$$E_n = \{1, 1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-(k+p)}\} \tag{2}$$

*n действительных чисел, где единица повторяется k раз, отрицательная единица p раз,* $\lambda_i < 0$ *при* $i \leqslant t$, $\lambda_i \geqslant 0$ *при* $i > t$, $|\lambda_i| < 1$ $(i = \overline{1, n-(k+p)})$, *была совокупностью характеристических чисел некоторой стохастической матрицы n-го порядка, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $k > p$, *т. е.* $k - p = s \geqslant 1$;

2) *отрицательные числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ *совокупности могут быть распределены на* $q \leqslant s$ *групп так, чтобы сумма модулей чисел, входящих в каждую из групп, была меньше единицы.*

Теорема 4. *Для того чтобы совокупность n действительных чисел* (2), где все $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, n-(k+p)})$ *была совокупностью характеристических чисел некоторой стохастической матрицы n-го порядка, необходимо и достаточно выполнение неравенства* $k \geqslant p$.

Теорема 5. *Для того чтобы совокупность n действительных чисел* (2), *где числа* $\lambda_i$ *отрицательны* $(i = \overline{1, n-(k+p)})$, *была совокупностью характеристических чисел некоторой стохастической матрицы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* 1) *и* 2) *теоремы* 3.

Замечание. Приведенные выше результаты переносятся на нестохастические матрицы с положительными и неотрицательными элементами.

Поступило
III 1949

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Дмитриев и Е. Дынкин, Изв. АН СССР, сер. математ., 10, 2. 161 (1946); ДАН, 49, 3 (1946). [2] В. И. Романовский, Acta Math., 66, 147 (1936).