Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 3

*МАТЕМАТИКА*

М. В. ПЕНТКОВСКИЙ

# НОМОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОТЫСКАНИЯ НАИЛУЧШЕГО ПРОЕКТИВНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ШКАЛ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 III 1949)*

Одной из основных задач практической номографии является построение номограмм, дающих ответ с заданной степенью точности. Это достигается, в частности, соответствующим проективным преобразованием номограмм. При проективном преобразовании номограмм оказывается необходимым отыскание преобразований, дающих наилучшее приближение шкал номограмм к заданному виду (1). Ниже указан номографический метод отыскания наилучшего преобразования проективных шкал.

Пусть уравнение шкалы переменного $x$ $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$

$$s = s(x),$$

где $s$ — длина дуги носителя шкалы. Назовем **х а р а к т е р и с т и к о й ш к а л ы** функцию:

$$\Delta\xi = \frac{\Delta s}{s(x_2) - s(x_1)} \approx \frac{s'(x)\,\Delta x}{s(x_2) - s(x_1)},$$

где $\Delta x$ — заданная функция $x$. Геометрически характеристика определяет относительную длину деления заданной цены $\Delta x$ в зависимости от его положения на шкале.

Проективным преобразованием, дающим наилучшее приближение к шкале с постоянными по длине делениями цены $\Delta x$, назовем то, при котором нижняя грань значений $|\Delta\xi|$ будет иметь наибольшее значение.

Предполагается, что шкала не имеет ни точек сгущения, ни точек возврата и однослойная (точкой сгущения называется точка, где $s'(x)$ обращается в нуль, не меняя знака; точкой возврата называется точка, где $s'(x)$ меняет знак; шкала называется многослойной, если некоторые ее точки имеют по нескольку пометок). Точки возврата и сгущения следует исключать вместе с некоторой их окрестностью. Для многослойных шкал задача может быть решена для одного из слоев, т. е. для одного из интервалов монотонности функции $s(x)$.

Для приближения к равномерной шкале функция $\Delta x$ имеет вид: $\Delta x = \mathrm{const}$; для приближения к логарифмической шкале $\Delta x = x\,\mathrm{const}$. В первом случае характеристики будем называть **р а в н о м е р н ы м и**, во втором — **л о г а р и ф м и ч е с к и м и**.

Напишем уравнение семейства характеристик прямолинейных шкал, проективных шкале $\xi_1 = f(x)$. Обозначим:

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

Уравнение семейства шкал, проективных шкале $\xi_1 = f(x)$:

$$\xi = \frac{F(x)(\mu + 1)}{F(x)\mu + 1},$$

где $\mu$ — параметр преобразования, ограниченный условием $\mu + 1 > 0$. Точки с пометками $x_1$ и $x_2$ при преобразовании будут неподвижны. Уравнение характеристики будет иметь вид:

$$\Delta\xi = \frac{(\mu + 1)\,|F'(x)|\,\Delta x}{[F(x)\mu + 1]^2}.$$

Для вычисления $\Delta\xi$ построена номограмма. Она изображена на рис. 1. Номограмма имеет две параллельные шкалы одного и того же переменного $x$ и бинарное поле переменных $\mu$ и $\Delta\xi$.

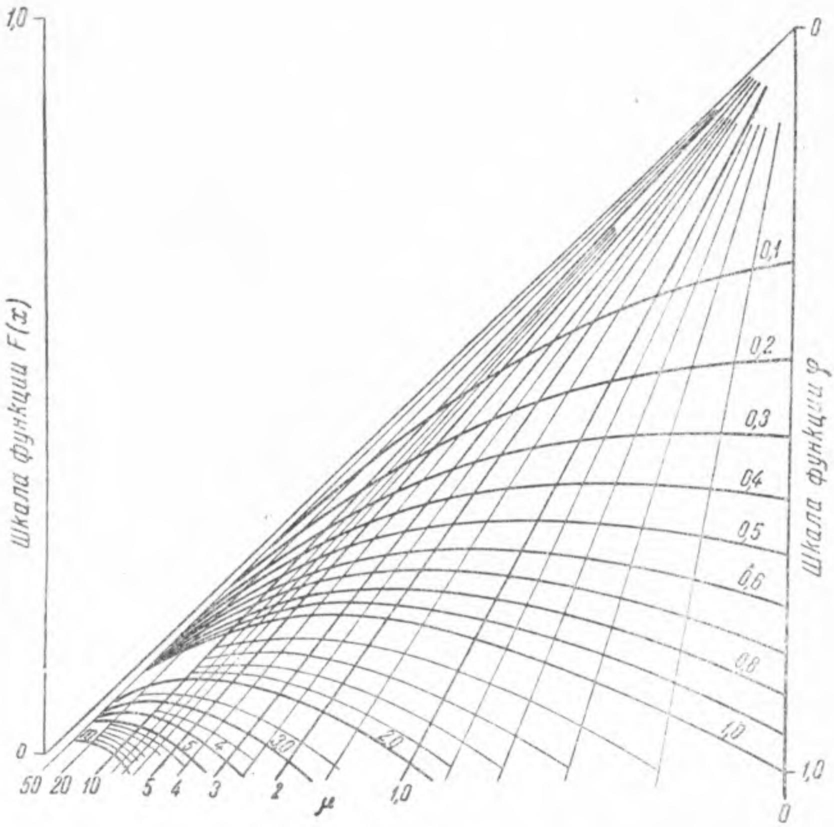


Рис. 1. Номограмма для вычисления $\Delta\xi$

Шкалы переменного $x$ не нанесены, так как их вид определяется функциями $f(x)$ и $\Delta x$. Уравнение левой шкалы номограммы $y = F(x)$. На номограмме на носителе левой шкалы отложена масштабная единица и нанесены точки $y = 0$ и $y = 1$. Уравнение правой шкалы номограммы $y = \varphi(x) = l\sqrt{|F'(x)|\,\Delta x}$. На носителе правой шкалы также отложена масштабная единица и указаны точки $y = 0$ и $y = 1$. Положительное направление отсчета $y$ здесь сверху вниз. Множитель $l$ в уравнение шкалы введен для удобства пользования номограммой.

Параметру $\mu$ на номограмме соответствуют прямые поля. Номограмма построена для $\mu > 0$. Геометрически это означает, что на ней рассматриваются лишь проективные преобразования, при которых точки первоначальной шкалы смещаются вправо (от $x_1$ к $x_2$). Если необходимо исследовать преобразование, при котором точки шкалы смещаются влево (от $x_2$ к $x_1$), следует поменять местами концы шкалы, т. е. рассмотреть функцию $\overline{F}(x)=\frac{f(x_2)-f(x)}{f(x_2)-f(x_1)}$. Значениям $\Delta\xi$ соответствуют на номограмме кривые поля. Номограмма дает не непосредственно $\Delta\xi$, как это надписано на кривых, а значение величины $l^2\Delta\xi$.

Способ пользования номограммой следующий. По заданной функции $f(x)$ строим левую шкалу переменного $x$, нанося некоторое количество ее точек. Затем составляем выражение $l\sqrt{|F'(x)\Delta x|}$, выбирая множитель $l$ так, чтобы правая шкала оказалась расположенной полностью на отрезке $y=0$, $y=1$ и имела наибольшую длину. Точки на правой шкале наносим с теми же пометками, что и на левой шкале.

На номограмме наносим семейство разрешающих прямых, соединяющих точки с одинаковыми пометками на шкалах переменного $x$. Область пересечения всех таких разрешающих прямых с одной и той же прямой $\mu$ определяет область значений $\Delta\xi$ на шкале, соответствующей этому значению параметра преобразования. Значение параметра $\mu$, дающего наилучшее преобразование шкалы, будет соответствовать той из прямых $\mu$, на которой нижняя грань значений $\Delta\xi$ будет наибольшей. Практически эта прямая находится легко. Найдя $\mu$, по номограмме можно найти нижнюю грань $\Delta\xi$, что важно при определении масштаба чертежа. Если окажется, что нижняя грань $\Delta\xi$ для $\mu>0$ меньше, чем для $\mu=0$, то это означает, что следует рассмотреть преобразование, при котором точки шкалы будут перемещаться в другую сторону, т. е. поменять местами концы шкалы $\xi_1=f(x)$. Практически это сводится к перемене местами на номограмме начала и конца шкалы $x$ на левом носителе. Правая шкала остается без изменения.

По номограмме можно также судить о том, как сказывается на виде шкалы отклонение от значения $\mu$, дающего наилучшее приближение. При построении номограммы в целом такие отклонения возможны.

Укажем некоторые свойства характеристик, которые в ряде случаев позволяют найти параметр наилучшего преобразования к виду, определяемому заданной функцией $\Delta x$, аналитическим путем. Относительно функции $F(x)$ предполагается, что $F'$, $F''$, $F'''$ существуют и непрерывны и $F'>0$. Последнее геометрически означает, что на шкале нет точек сгущения или возврата и шкала однослойная.

1. Значение характеристики в точке $x_1$ монотонно возрастает и в точке $x_2$ монотонно убывает с ростом $\mu$.

2. Произведение значений характеристики в точке $x_1$ и в точке $x_2$ постоянно (не зависит от $\mu$).

3. Каждая точка шкалы перемещается от $x_1$ к $x_2$ при увеличении значения параметра $\mu$.

4. Для каждого $x$ характеристика достигает наибольшего значения посредине шкалы.

Если характеристики шкалы имеют один максимум или монотонны, то нижняя грань значений характеристики будет наибольшей для характеристики, имеющей равные значения в начале и конце шкалы.

Если характеристики шкалы имеют один минимум или монотонны, то нижняя грань значений характеристики будет наибольшей для характеристики, имеющей минимум посредине шкалы.

Рассмотрим приближение к равномерной и логарифмической шкалам. Равномерные характеристики шкалы имеют лишь один максимум или монотонны, если

$$2F'''F'-3F''^2<0,$$

и имеют лишь один минимум или монотонны, если

$$2F'''F' - 3F''^2 > 0$$

для значений $x$, удовлетворяющих неравенству:

$$-1 < \frac{F'}{2F'^2 - F''F}.$$

Значение параметра наилучшего преобразования в первом случае равно:

$$\mu = \sqrt{\frac{F'(x_2)}{F'(x_1)}} - 1;$$

во втором случае оно находится как решение системы уравнений:

$$1 - (\mu + 2)F = 0,$$

$$F''(\mu F + 1) - 2\mu F'^2 = 0.$$

Логарифмические характеристики шкалы имеют один максимум или монотонны, если

$$x^2(2F'''F' - 3F''^2) - F'^2 < 0,$$

и имеют один минимум или монотонны, если

$$x^2(2F'''F' - 3F''^2) - F'^2 > 0$$

для значений $x$, удовлетворяющих неравенству:

$$-1 < \frac{F'x + F}{(2F'^2 - F''F)x - F'F}.$$

В первом случае значение параметра наилучшего преобразования равно:

$$\mu = \sqrt{\frac{F'(x_2)\cdot x_2}{F'(x_1)\cdot x_1}} - 1;$$

во втором случае оно находится как решение системы уравнений:

$$1 - (\mu + 2)F = 0,$$

$$[F''(\mu F + 1) - 2\mu F'^2]x + F'(\mu F + 1) = 0.$$

Поступило
16 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Пентковский, Проективное преобразование номограмм, 1937, стр. 41.