Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

# ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

*(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 III 1949)*

В настоящей заметке мы докажем следующую теорему интерполяционного характера.

Теорема 1. *Пусть* $\{\lambda_n\}$, $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, — *последовательность точек вещественной оси такая, что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{n}{\lambda_n^\rho}<\infty$, *где* $\rho>0$.

*Если существует функция* $f(z)$, *регулярная в некотором угле* $|\arg z|<\mu$, $\mu>0$, *и удовлетворяющая в этом угле при достаточно больших* $|z|$ *условию*

$$|f(z)|<e^{c|z|^\rho}, \tag{1}$$

*где* $c$ — *постоянная, со свойством* $f(\lambda_n)=(-1)^n$ $(n=1, 2, \ldots)$, *то тогда по любой системе чисел* $\{a_n\}$ *такой, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n^\rho}<\infty,$$

*можно найти хоть одну целую функцию* $\omega(z)$ *порядка меньшего или равного* $\rho$ *и типа меньшего бесконечности со свойством* $\omega(\lambda_n)=a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Для доказательства этой теоремы достаточно, в силу теоремы 1 работы [1], установить, что последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n^\rho}\ln\left|\frac{1}{F'(\lambda_n)}\right|<\infty,\quad F(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^m}{\lambda_j^m}\right), \tag{2}$$

где $m$ — наименьшее целое число, большее $\rho$.

При выводе условия (2) мы будем опираться на следующую легко доказываемую лемму.

Лемма. *Если последовательность* $\{\mu_n\}$, $0<\mu_1<\mu_2<\ldots$, *такова, что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{n}{\mu_n^\rho}=\sigma<\infty$, $\rho>0$, *то тогда при любом* $q>\rho$

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}}\frac{1}{|z|^\rho}\ln\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{|z|^q}{\mu_n^q}\right)\leqslant\frac{\sigma q}{\rho}\int_0^\infty\frac{dt}{t^{q/\rho}+1}<\infty.$$

Именно, положим:

$$f_n(z) = \prod_{j=n+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^{km}}{\lambda_j^{km}}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где целое число $k$ выберем столь большим, чтобы величина $\varphi_0 = \frac{\pi}{km}$ была меньше наименьшего из чисел $\frac{\pi}{2}$, $\mu$. Так как $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n^\rho} < \infty$, то, в силу леммы, при $|z| > r_0$ имеем равномерную относительно $n$ оценку:

$$|f_n(z)| < \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + \frac{|z|^{km}}{\lambda_j^{km}}\right) < e^{\tau|z|^\rho}, \tag{3}$$

где $\tau$ — постоянная. После этого рассмотрим интегралы

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)\, f_n(t)}{f_0(t)} e^{-xt^\rho} dt, \quad I(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{f_0(t)} e^{-xt^\rho} dt,$$

где контур интегрирования $L$ состоит из двух лучей: $L = (\infty e^{\varphi_0 i}, 0] + [0, \infty e^{-\varphi_0 i})$. Так как вдоль $L$

$$|f_0(t)| = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + \frac{|t|^{km}}{\lambda_j^{km}}\right) \geqslant 1,$$

то, согласно неравенствам (1) и (3), интегралы $I_n(x)$ и $I(x)$ имеют смысл во всякой действительной точке $x_0 > \frac{c+\tau}{\cos(\pi\rho/km)}$. Больше того, поскольку в любой ограниченной области равномерно $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 1$ и оценка (3) имеет место равномерно относительно $n$ в указанной точке $x_0$,

$$\lim_{n\to\infty} I_n(x_0) = I(x_0). \tag{4}$$

Мы имеем, с другой стороны, что

$$I_n(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)}{\varphi_n(t)} e^{-x_0 t^\rho} dt, \quad \varphi_n(t) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{t^{km}}{\lambda_j^{km}}\right).$$

Отсюда, основываясь на оценке (1), получаем:

$$I_n(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\lambda_j)}{\varphi_n'(\lambda_j)} e^{-x_0\lambda_j^\rho}.$$

Так как $f(\lambda_i) = (-1)^j$ и при $j \leqslant n$

$$\varphi_n'(\lambda_j) = -\frac{km}{\lambda_j}\prod_{s=1}^{j-1}\left(1 - \frac{\lambda_j^{km}}{\lambda_s^{km}}\right)\cdot\prod_{s=j+1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda_j^{km}}{\lambda_s^{km}}\right) = (-1)^j A_{n,j}, \quad A_{n,j} > 0,$$

то

$$I_n(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\varphi_n'(\lambda_j)|} e^{-x_0\lambda_j^\rho}.$$

Отсюда заключаем, что при $p<n$

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{|\varphi_n'(\lambda_j)|} e^{-x_0\lambda_j^{\rho}} < I_n(x_0).$$

Фиксируя здесь $p$ и устремляя $n$ в бесконечность, в пределе получим, на основании (4), что

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{|f_0'(\lambda_j)|} e^{-x_0\lambda_j^{\rho}} \leqslant I(x_0).$$

Из этого, поскольку $p$ произвольно, следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|f_0'(\lambda_n)|} e^{-x_0\lambda_n^{\rho}}.$$

Следовательно, ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|f_0'(\lambda_n)|} e^{-z\lambda_n^{\rho}},$$

сходящийся в точке $x_0$, будет иметь отличную от $+\infty$ абсциссу сходимости $a$, т. е. (см., например, [2])

$$a = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n^{\rho}} \ln\left|\frac{1}{f_0'(\lambda_n)}\right| < \infty. \tag{5}$$

Считая, что число $k$ является степенью числа 2, мы будем далее иметь:

$$f_0(z) = F(z)\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^m}{\lambda_j^m}\right)\cdot\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^{2m}}{\lambda_j^{2m}}\right)\cdots\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^{\frac{k}{2}m}}{\lambda_j^{\frac{k}{2}m}}\right),$$

$$f_0'(\lambda_n) = F'(\lambda_n)\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n^m}{\lambda_j^m}\right)\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n^{2m}}{\lambda_j^{2m}}\right)\cdots\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n^{\frac{k}{2}m}}{\lambda_j^{\frac{k}{2}m}}\right).$$

Из последнего равенства на основании леммы получим:

$$|f_0'(\lambda_n)| < |F'(\lambda_n)|\, e^{c_1\lambda_n^{\rho}}, \quad c_1 = \text{const}.$$

Отсюда, в силу неравенства (5), заключаем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n^{\rho}} \ln\left|\frac{1}{F'(\lambda_n)}\right| \leqslant c_1 + a < \infty,$$

т. е. что условие (2) действительно выполняется.

Теорема 1 этим самым установлена.

Из нее, основываясь на работе [1], как следствие, получается следующая

Теорема 2. *Пусть* $\{\lambda_n\}$, $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, — *некоторая последовательность точек вещественной оси. Тогда для того, чтобы при* *любой системе чисел* $\{a_n\}$ *такой, что* $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n^\rho} < \infty$, *существовала бы хоть одна целая функция* $\omega(z)$ *порядка меньшего или равного* $\rho$ *и типа, отличного от бесконечности, со свойством* $\omega(\lambda_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяла условию* $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{n}{\lambda_n^\rho} < \infty$ *и условию* (2).

Поступило
19 II 1949

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Леонтьев, ДАН, 66, № 1 (1949). [2] W. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933, p. 4.