Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

ЛЮДМИЛА КЕЛДЫШ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СЕГМЕНТА НА n-МЕРНЫЙ КУБ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 25 III 1949)

Мы изучаем вопрос о возможности представления непрерывного отображения сегмента на n-мерный куб в виде суперпозиции конечного числа непрерывных отображений, одни из которых конечнократны (т. е. прообраз каждой точки состоит из конечного числа точек), а другие не повышают размерности. Проблема П. С. Александрова о возможности представления непрерывного отображения, повышающего размерность, в виде суперпозиции двух отображений— одного не повышающего размерности и одного конечнократного — для общего случая непрерывного отображения сегмента на куб решается отрицательно, поэтому мы ставим вопрос несколько шире.

Непрерывное отображение $\psi(X)$ компакта X называется равномерно не повышающим размерность, если для всякого куска $\overline{V}$ (замыкания открытого в X множества)

$$\dim\psi(\overline{V})\leqslant\dim\overline{V}\ ^{*}.$$

Непрерывное отображение $Y=\varphi(X)$ называется двукратным, если прообраз $\varphi^{-1}(y)$ произвольной точки $y\subset Y$ содержит не более двух точек.

Мы доказываем следующие два предложения:

I. *Всякое неприводимое отображение* $C_n=f(I)$ *сегмента на n-мерный куб может быть представлено в виде суперпозиции* $2(n-1)$ *непрерывных отображений:*

$$f=\varphi_{n-1}\psi_{n-1}\cdots\varphi_1\psi_1, \tag{1}$$

*где все ψ_i нульмерные отображения**, равномерно не повышающие размерности, а все φ_i двукратны и повышают размерность на единицу.*

II. *Приводимое отображение* $C_n=\bar{f}(I)$ *сегмента на n-мерный куб такое, что для всякого сегмента $\delta\subset I$ имеет место* $\dim f(\delta)=n$, *может быть представлено в виде суперпозиции* $2n-1$ *непрерывных отображений:*

$$\bar{f}=\psi_n\varphi_{n-1}\psi_{n-1}\cdots\varphi_1\psi_1, \tag{2}$$

где ψ_i и φ_i удовлетворяют тем же условиям, что в (1).

* dim — размерность.
** Т. е. образ каждой точки нульмерен.

Предложения I и II легко вытекают из следующих двух теорем.

Теорема 1. *Пусть $Y = f(I)$ — непрерывное отображение сегмента на n-мерный компакт Y, обладающее следующими свойствами:*

1) *образ $f(\delta)$ любого сегмента $\delta \subset I$ содержит подмножество, гомеоморфное n-мерному кубу;*

2) *для любых двух непересекающихся сегментов δ_1 и δ_2 имеет место:*

$$\dim f(\delta_1) \cdot f(\delta_2) \leqslant n - 1, \quad \delta_1 \cdot \delta_2 = 0.$$

Тогда отображение f может быть представлено в виде суперпозиции двух непрерывных отображений: $f = \varphi\Phi$, где φ двукратно, $\dim \Phi(I) = n - 1$ и образ $\Phi(\delta)$ любого сегмента δ содержит подмножество, гомеоморфное $n - 1$-мерному кубу.

Теорема 2. *Пусть $Y = f(I)$ — непрерывное отображение сегмента на n-мерный компакт Y такое, что образ $f(\delta)$ любого сегмента δ содержит подмножество, гомеоморфное n-мерному кубу. Тогда f представимо в виде суперпозиции двух непрерывных отображений: $f = \psi f_1$, где ψ нульмерно и равномерно не повышает размерности, а f_1 обладает свойствами* 1) *и* 2) (см. теорему 1).

Укажем вкратце идею доказательства теоремы 1. Оно основано на следующей лемме.

Лемма. *Если $Y = f(X)$ — непрерывное отображение куска* сегмента X на n-мерный компакт Y, а E — подмножесто Y размерности $\leqslant n - 1$, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует правильное разбиение ** X на куски S_i, индуцирующее ε-разбиение $Y = \sum f(S_i)$ порядка $n + 1$ *** и ε-разбиение $E = \sum E \cdot f(S_i)$ порядка n ****.*

Компакт $Z = \Phi(I)$ и отображение Φ строятся в топологическом произведении Y на прямую (ось z) и определяются парой соотношений: $y = f(t)$, $t \subset I$, и действительнозначной функцией $z = F(t)$. $F(t)$ — сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций $\varphi_m(t)$, которые строятся по индукции. Задаем убывающую последовательность чисел $\varepsilon_m \to 0$.

Построение $\varphi_1(t)$. Пусть $C_0 \subset Y$ — множество, гомеоморфное $n - 1$-мерному кубу, и $I = \sum\limits_i S_{1i}$ — правильное разбиение I, индуцирующее ε_1-разбиения: Y — порядка $n + 1$ и C_0 — порядка n. На каждом множестве $f(S_{1i})$ строим непрерывную функцию $\tilde{\varphi}_i(y)$. Пусть:

$$B_{i_1 \ldots i_k} = f(S_{1i_1}) \ldots f(S_{1i_k}), \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_k.$$

Мы строим $\tilde{\varphi}_i(y)$ последовательно на множествах $B_{i_1 \ldots i_k}$, $k = n+1, n, \ldots, 1$. В точках $B_{i_1 \ldots i_{n+1}}$ полагаем:

$$\tilde{\varphi}_{i_1}(y) = \tilde{\varphi}_{i_2}(y) = \ldots = \tilde{\varphi}_{i_n}(y) = 0, \quad \tilde{\varphi}_{i_{n+1}}(y) = {}^1/_2.$$

---

* Куском сегмента I называется сумма конечного числа сегментов, содержащихся в I.

** Т. е. пересечение $S_i \cdot S_j$ состоит из конечного числа точек (концов). Из условий 1) и 2) следует, что f неприводимо. Мы можем поэтому считать, что концы x_μ куска S_i лежат в точках единственности: $x_\mu = f^{-1} f(x_\mu)$.

*** Т. е. пересечение кусков $f(S_i)$ по $n + 2$ пусто.

**** Эта лемма является для случая куска сегмента усилением леммы, доказанной в (1).

Каждая функция $\tilde{\varphi}_i(y)$ определена тем самым на сумме тех $B_{i_1 \ldots i_{n+1}}$, в кортеж которых входит индекс i, и непрерывна. Затем строим функции $\tilde{\varphi}_i(y)$, дополняя их последовательно до непрерывных функций на $\sum\limits_{i \subset i_1 \ldots i_n} B_{i_1 \ldots i_n}, \ldots, B_i = f(S_{1i})$, так, что на $B_{i_1 \ldots i_k}$:

$$\tilde{\varphi}_{i_1}(y) = \ldots = \tilde{\varphi}_{i_{k-1}}(y) = 0, \quad \tilde{\varphi}_{i_k}(y)_{y \subset C_\bullet} = 0; \;\; 0 < \tilde{\varphi}_{i_k}(y)_{\, y \not\subset C_\bullet} \leqslant {}^1/_2.$$

На $B_{i_1 i_2}$ полагаем $\tilde{\varphi}_{i_2}(y_\mu) = 0$, если $y_\mu \subset f(S_{1i} \cdot S_{1j})$. Затем полагаем:

$$\varphi_1(t) = \tilde{\varphi}_i[f(t)], \text{ если } t \subset S_{1i}.$$

$\varphi_1(t)$ непрерывна на I и $0 \leqslant \varphi_1(t) \leqslant {}^1/_2$.

a) Компакт Z_1, точки которого определяются соотношениями $y = f(t)$; $z = \varphi_1(t)$, является суммой конечного числа кусков $Z_1(S_{1i})$, пересекающихся не более, чем по n;

b) каждая прямая, параллельная оси z, пересекает Z_1 не более, чем в 2 точках.

Мы по индукции строим последовательность компактов Z_m, обладающих свойствами a) и b). Компакту Z_m соответствует правильное разбиение:

$$I = \sum_i S_{mi}. \tag{3}$$

При переходе от Z_{m-1} к Z_m каждый кусок $S_{m-1,i}$ разбивается на сумму конечного числа кусков S_{mj}, а затем некоторые $Z_{m-1}(S_{mj})$ непрерывно деформируются так, что у точки $M(y, z)$ координата y не меняется, а координата z может увеличиваться, но не более, чем на $1/2^{m-1}$. Координаты z точек M, проектирующихся на Y в границы кусков $f(S_{m-1,i})$, не меняются. Последовательность компактов Z_m топологически сходится к искомому $n-1$-мерному компакту Z.

Пусть точки компакта Z_{m-1} определяются соотношениями:

$$y = f(t), \quad z = F_{m-1}(t) = \sum_{k=1}^{m-1} \varphi_k(t),$$

где $\varphi_k(t)$ — непрерывные функции t, $0 \leqslant \varphi_k(t) \leqslant 1/2^k$, и

$$F_{m-1}(t) = \tilde{F}_{m-1,i}[f(t)], \quad \text{если } t \subset S_{m-1,i}.$$

Для построения Z_m и $\varphi_m(t)$ рассматриваем множество E_{m-1}, состоящее из суммы границ всех кусков $f(S_{m-1,i})$ и множеств P_{ki}, $k < m-1$, образы которых $f(P_{ki})$ являются суммами конечного числа гомеоморфов $n-1$-мерному кубу. $\dim E_{m-1} = n-1$, поэтому его прообраз E_{m-1}^{-1} можно поместить внутрь суммы конечного числа кусков σ_m^η, концы которых лежат в точках единственности так, что $\sum\limits_\eta f(\sigma_m^\eta)$ являются ε'_m-покрытием E_{m-1} порядка n*.

---

* $\varepsilon'_m < \varepsilon_m$ настолько мало, что если $d(\Delta) < \varepsilon'_m$ (d — диаметр), то $\omega(\tilde{F}_{m-1,i}(\Delta)) < \varepsilon_m / N$, где ω — колебание $\tilde{F}_{m-1,i}$ на Δ ($\tilde{F}_{m-1,i}$ непрерывна), а N — число всех кусков $S_{m-1,i}$. Наше утверждение легко выводится из леммы, доказанной в ([1]).

Полагаем

$$s_{mj} = S_{m-1,j} \cdot \sum_{\eta} \sigma_m^{\eta}, \quad S'_{m-1,j} = \overline{S_{m-1,j} - \sum_{\eta} \sigma_m^{\eta}}.$$

Выбираем в каждом $S'_{m-1,j}$ совершенное множество $P_{m-1,j}$ так, что образ его части, лежащий в любом из сегментов, составляющих $S'_{m-1,j}$, гомеоморфен $n-1$-мерному кубу. Пусть $E_{m-1,j} = f(S'_{m-1,j}) \cdot f(\overline{I - S'_{m-1,j}}) + f(P_{m-1,j})$. Так как $\dim E_{m-1,j} = n-1$, то существует правильное разбиение $S'_{m-1,j}$, индуцирующее ε''_m-разбиение *:

$$f(\tilde{S}_{m-1,j}) = \sum_i f(\tilde{S}_{mi})$$

порядка $n+1$ такое, что

$$f(\tilde{S}_{mi_1}) \ldots f(\tilde{S}_{mi_{n+1}}) \cdot E_{m-1,j} = 0$$

(разбиение (3) слагается из кусков s_{mj} и $\tilde{S}_{mi}$).

Мы строим $\varphi_m(t)$ на куске $S'_{m-1,j}$ аналогично тому, как $\varphi_1(t)$ строится на I, с тем условием, что $\varphi_m(t)$ обращается в 0 только в концах куска $S_{m-1,j}$. Для этого на соответствующих множествах $B^{m-1,j}_{i_1 \ldots i_{n+1}}$ даем функциям $\tilde{\varphi}_{mi}$ значения $1/2^{m+1}$ и $1/2^m$. Затем полагаем $\varphi_m(t) = 0$, если $t \subset s_{mj}$. Тогда $\varphi_m(t)$ непрерывна на I и $0 \leqslant \varphi_m(t) \leqslant 1/2^m$, а компакт Z_m удовлетворяет условиям a) и b).

Пара соотношений:

$$y = f(t), \qquad z = F(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t) \tag{4}$$

определяет компакт Z и непрерывное отображение I на Z:

$$Z = \Phi(I).$$

Отображение $Y = \varphi(Z)$ осуществляется проекцией Z на Y. Легко показать, что φ двукратно.

Мы доказываем, что $\dim Z = n-1$. Для этого для произвольного ε выбираем m настолько большим, что $\varepsilon_m < \varepsilon/3$ и $1/2^{m-1} < \varepsilon/3$ и показываем, что разбиение компакта Z на слагаемые $Z(\tilde{S}_{mi})$ и связные компоненты множеств $Z(\sigma_m^{\eta})$ является ε-разбиением порядка n.

Каждое $f(P_{mi})$ гомеоморфно $\Phi(P_{mi})$, откуда легко следует, что образ $\Phi(\delta)$ любого сегмента δ содержит гомеоморф $n-1$-мерному кубу.

Следовательно, представление $f = \varphi\Phi$ удовлетворяет условиям теоремы, ч. т. д.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
19 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Келдыш, ДАН, 58, № 2 (1947).

* $\varepsilon''_m < \varepsilon_m$ и $\omega(\tilde{F}_{m-1,j}(\Delta)) < \varepsilon_m$, если $d(\Delta) < \varepsilon''_m$.