Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

Действительный член Академии наук УССР Б. В. ГНЕДЕНКО

О ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ НОРМАЛЬНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ЗАКОНОВ

Пусть дана последовательность взаимно-независимых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

с одним и тем же законом распределения. Мы скажем, что величина ξ_n имеет решетчатое распределение, если существуют такие числа α и h, что любое возможное значение ξ_n, т. е. принимаемое с положительной вероятностью, может быть представлено в виде $a+kh$, где k пробегает только целочисленные значения (не обязательно все). Число h назовем шагом распределения. Шаг распределения назовем максимальным, если ни при каком $h_1 > h$ нельзя представить все возможные значения ξ_n в виде $b+kh_1$. Условие максимальности шага распределения можно выразить в других терминах, а именно, h является максимальным шагом тогда и только тогда, когда общий наибольший делитель всех разностей возможных значений величины ξ_n, деленных на h, равен единице.

Если (1) есть последовательность решетчато распределенных случайных величин с шагом h, то сумма $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ также имеет решетчатое распределение и возможные значения s_n имеют, очевидно, вид $na + kh$. Положим $P_n(k) = P\{s_n = na + kh\}$.

Функция распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения закона $\Phi(x)$, если функции распределения нормированных сумм

$$\sigma_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n} \tag{2}$$

взаимно-независимых случайных величин, каждая из которых распределена по закону $F(x)$, при надлежащем подборе вещественных постоянных $B_n > 0$ и A_n сходятся при $n \to \infty$ к функции $\Phi(x)$. Как выяснили А. Я. Хинчин и P. Lévy [1], в качестве предельных функций распределения могут выступать все устойчивые законы распределения и только они. Для того чтобы закон распределения $\Phi(x)$ был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы логарифм его характеристической функции мог быть записан в виде

$$\lg \varphi(t) = i\gamma t - c\,|t|^{\alpha}\left\{1 + i\beta \frac{t}{|t|}\,\omega(t, \alpha)\right\}, \tag{3}$$

где α, β, γ, c — вещественные постояннные ($0 \leqslant \alpha \leqslant 2$, $c > 0$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$), а $\omega(t, \alpha) = \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}$ при $\alpha \neq 1$, $\omega(t, \alpha) = \frac{2}{\pi} \lg |t|$ при $\alpha = 1$.

Мы скажем, что функция $F(x)$ принадлежит области нормального притяжения, если функции распределения сумм (2) сходятся к функции $\Phi(x)$ при таком выборе коэффициентов $B_n = an^{\frac{1}{\alpha}}$, где a — постоянная, не зависящая от n. Такое ограничение в выборе нормирующих коэффициентов вполне соответствует классическому нормированию средними квадратическими уклонениями в теореме Ляпунова.

Известно, что все устойчивые законы распределения имеют плотности распределения вероятностей ([1], стр. 101). Мы обозначим плотность распределения устойчивого закона с характеристической функцией (3) через $p(x;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ c)$.

Относительно решетчатых распределений, принадлежащих областям нормального притяжения устойчивых законов, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы для одинаково распределенных решетчатых и взаимно-независимых случайных величин последовательности* (1) *равномерно относительно* k $(-\infty<k<\infty)$ *имело место соотношение*

$$\frac{an^{1/\alpha}}{h}P_n(k)-p(z_{nk};\ \alpha,\beta,\gamma,c)\to 0 \quad (n\to\infty),$$

где обозначено $z_{nk}=\dfrac{k-A_n+na}{an^{1/\alpha}}$ *и* A_n *сохраняет смысл, приданный ему при определении области притяжения, необходимо и достаточно чтобы:* 1) *функция* $F(x)=P\{\xi_n<x\}$ *принадлежала области нормального притяжения закона* $\Phi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(u;\alpha,\beta,\gamma,c)du$,

2) *шаг распределения* h *был максимальным.*

Очевидно, что сформулированная теорема в качестве частного случая содержит результат, опубликованный мною ранее ([2]) (случай нормального распределения, $\alpha=2$).

Доказательство теоремы базируется на результатах работы ([3]), а также на следующих двух элементарных леммах.

Лемма 1. *Пусть числа* p_k *удовлетворяют соотношениям* $p_k\geqslant 0$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}p_k=1$. *Для того чтобы ни при одном значении* t $(0<t<2\pi)$ *функция* $f(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}p_ke^{itk}$ *по модулю не достигала значения* 1, *необходимо и достаточно, чтобы общий наибольший делитель разностей тех* k, *для которых величины* p_k *отличны от нуля, равнялся единице.*

Лемма 2. *Если функция распределения* $F(x)$ *принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона* $\Phi(x)$, *характеристическая функция которого дается формулой* (3), *то в окрестности точки* $t=0$ *для характеристической функции закона* $F(x)$ *при некотором постоянном* $c_0>0$ *имеет место неравенство*

$$|f(t)|\leqslant e^{-c_0|t|^\alpha}.$$

Математический институт
Академии наук УССР

Поступило
31 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1938. [2] Б. В. Гнеденко, Усп. матем. наук, 3, в. 3, 187 (1948). [3] Б. В. Гнеденко, Уч. зап. Моск. ун-та, 30, 61 (1939).