Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. М. ФРИДМАН

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО РАЗРЕЗА, СВОБОДНОГО ОТ НАПРЯЖЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 III 1949)

В работе ([1]) мною была рассмотрена двухмерная задача дифракции плоской упругой волны относительно полубесконечного прямолинейного жестко закрепленного разреза. В настоящей работе разрез предполагается свободным от напряжений.

1. Рассмотрим упругую плоскость xy, в которой сделан разрез вдоль луча $y=0$, $x\geqslant 0$. Берега разреза предполагаются свободными от напряжений: $\sigma_y=0$, $\tau_{xy}=0$ $(y=0,\ x\geqslant 0)$. В упругой плоскости распространяется элементарная плоская продольная волна

$$u=-cs(t-cx+\sqrt{a^2-c^2}\,y),\quad v=\sqrt{a^2-c^2}\,s(t-cx+\sqrt{a^2-c^2}\,y),$$

фронт которой при $t<0$ не пересекается с разрезом, а в момент времени $t=0$ доходит до начала разреза. Здесь: $1/a$ — скорость распространения фронта продольной волны; $1/b$ — скорость распространения фронта поперечной волны; c — вещественная постоянная, $0<c<a$; $s(\xi)$ — разрывная функция, равная единице при $\xi\geqslant 0$ и равная нулю при $\xi<0$. Требуется определить вектор упругих смещений $\mathbf{u}(x,y,t)$ в любой момент времени $t>0$.

Представим вектор $\mathbf{u}$ в виде суммы $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$, где $\mathbf{u}_1$ — вектор продольных смещений и $\mathbf{u}_2$ — вектор поперечных смещений. Пусть u_1 и v_1 — составляющие вектора $\mathbf{u}_1$; u_2 и v_2 — составляющие вектора $\mathbf{u}_2$. Будем искать решение задачи дифракции, взяв за функции $u_1(x,y,t)$, $v_1(x,y,t)$, $u_2(x,y,t)$ и $v_2(x,y,t)$ однородные функции нулевого измерения относительно переменных x,y,t. Однородные функции u_1, v_1, u_2 и v_2, являясь обобщенными решениями волнового уравнения, могут быть представлены в виде ([2]):

$$u_1=\operatorname{Re}U_1(\theta_1),\quad v_1=\operatorname{Re}V_1(\theta_1),\quad u_2=\operatorname{Re}U_2(\theta_2),\quad v_2=\operatorname{Re}V_2(\theta_2),\quad (1,1)$$

где $t-\theta_1 x-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,y=0$ и $t-\theta_2 x-\sqrt{b^2-\theta_2^2}\,y=0$; $U_1(\theta_1)$ и $V_1(\theta_1)$ — функции, голоморфные в плоскости комплексного переменного $\theta_1=\xi_1+i\eta_1$, разрезанной вдоль луча $\xi_1>-a$; $U_2(\theta_2)$ и $V_2(\theta_2)$ — функции, голоморфные в плоскости комплексного переменного $\theta_2=\xi_2+i\eta_2$, разрезанной вдоль луча $\xi_2>-b$;

$$\begin{gathered}\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,U_1'(\theta_1)-\theta_1 V_1'(\theta_1)=0,\\ \theta_2 U_2'(\theta_2)+\sqrt{b^2-\theta_2^2}\,V_2'(\theta_2)=0.\end{gathered}\qquad(1,2)$$

Функции $U_1(\theta_1)$, $V_1(\theta_1)$ и $U_2(\theta_2)$, $V_2(\theta_2)$ должны удовлетворять следующим краевым условиям на верхнем и нижнем берегах разреза плоскостей θ_1 и θ_2:

$$\operatorname{Re} U_1^+(\xi_1) = p, \quad \operatorname{Re} U_1^-(\xi_1) = p, \quad \operatorname{Re} V_1^+(\xi_1) = q, \quad \operatorname{Re} V_1^-(\xi_1) = q$$
$$(-a < \xi_1 < +c);$$
$$\operatorname{Re} U_1^+(\xi_1) = k, \quad \operatorname{Re} U_1^-(\xi_1) = 0, \quad \operatorname{Re} V_1^+(\xi_1) = h, \quad \operatorname{Re} V_1^-(\xi_1) = 0$$
$$(+c < \xi_1 < +a);$$
$$\operatorname{Re}[(2\xi^2 - b^2) U_1'(\xi) + 2\xi^2 U_2'(\xi)]^+ =$$
$$= \operatorname{Re}[(2\xi^2 - b^2) U_1'(\xi) + 2\xi^2 U_2'(\xi)]^- = 0,$$
$$\operatorname{Re}[(2\xi^2 - b^2) V_2'(\xi) + 2\xi^2 V_1'(\xi)]^+ =$$
$$= \operatorname{Re}[(2\xi^2 - b^2) V_2'(\xi) + 2\xi^2 V_1'(\xi)]^- = 0$$
$$(+a < \xi < +\infty); \tag{1,3}$$
$$\operatorname{Re} U_2^+(\xi_2) = 0, \quad \operatorname{Re} U_2^-(\xi_2) = 0, \quad \operatorname{Re} V_2^+(\xi_2) = 0, \quad \operatorname{Re} V_2^-(\xi_2) = 0$$
$$(-b < \xi_2 < +c);$$
$$\operatorname{Re} U_2^+(\xi_2) = k', \quad \operatorname{Re} U_2^-(\xi_2) = 0, \quad \operatorname{Re} V_2^+(\xi_2) = h', \quad \operatorname{Re} V_2^-(\xi_2) = 0$$
$$(+c < \xi_2 < +a).$$

Здесь: $p = -c$, $q = \sqrt{a^2 - c^2}$, $k = -c(1 + A)$, $h = \sqrt{a^2 - c^2}(1 - A)$, $k' = -\sqrt{b^2 - c^2}\, B$, $h' = cB$, где

$$A = -\frac{(b^2 - 2c^2)^2 - 4c^2\sqrt{a^2 - c^2}\sqrt{b^2 - c^2}}{(b^2 - 2c^2)^2 + 4c^2\sqrt{a^2 - c^2}\sqrt{b^2 - c^2}},$$

$$B = \frac{4c(b^2 - 2c^2)\sqrt{a^2 - c^2}}{(b^2 - 2c^2)^2 + 4c^2\sqrt{a^2 - c^2}\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

2. Продолжим разрез в плоскости θ_1 вдоль вещественной оси на отрезке $-b < \xi_1 < -a$. Пусть:

$$\operatorname{Re} U_1^+(\xi_1) = \operatorname{Re} U_1^-(\xi_1) = p + f_1(\xi_1),$$
$$\operatorname{Re} V_1^+(\xi_1) = \operatorname{Re} V_1^-(\xi_1) = q + f_2(\xi_1), \tag{2,1}$$

где $-b < \xi_1 < -a$; $f_1(\xi_1)$ и $f_2(\xi_1)$ — неизвестные функции.

Функции $(2\theta^2 - b^2) U_1'(\theta) + 2\theta^2 U_2'(\theta)$ и $(2\theta^2 - b^2) V_2'(\theta) + 2\theta^2 V_1'(\theta)$ должны быть голоморфны в плоскости комплексного переменного $\theta = \xi + i\eta$, разрезанной вдоль луча $\xi > -b$. Из краевых условий (1,3) и (2,1) эти функции могут быть определены непосредственно:

$$(2\theta^2 - b^2) U_1'(\theta) + 2\theta^2 U_2'(\theta) = \frac{\Phi(\theta) + U(\theta)}{\sqrt{b + \theta}},$$
$$(2\theta^2 - b^2) V_2'(\theta) + 2\theta^2 V_1'(\theta) = \frac{\Psi(\theta) + V(\theta)}{\sqrt{b + \theta}}, \tag{2,2}$$

$$\Phi(\theta)=\frac{1}{\pi i}\int_{-b}^{-a}(2\xi^2-b^2)\sqrt{b+\xi}\,\frac{f_1'(\xi)\,d\xi}{\xi-\theta},\quad \Psi(\theta)=\frac{1}{\pi i}\int_{-b}^{-a}2\xi^2\sqrt{b+\xi}\,\frac{f_2'(\xi)\,d\xi}{\xi-\theta};$$

$$U(\theta)=\sqrt{b+\theta}\,\{(2\theta^2-b^2)[pA(\theta)+kB(\theta)]+2k'\theta^2B(\theta)+P_1(\theta)\}+Q_1(\theta), \tag{2,3}$$

$$V(\theta)=\sqrt{b+\theta}\,\{2\theta^2[qA(\theta)+hB(\theta)]+h'(2\theta^2-b^2)B(\theta)+P_2(\theta)\}+Q_2(\theta);$$

$$A(\theta)=\frac{\sqrt{b+c}}{\pi i(\theta-c)\sqrt{b+\theta}},\quad B(\theta)=-\frac{\sqrt{b+c}}{2\pi i(\theta-c)\sqrt{b+\theta}}-\frac{1}{2\pi i(\theta-c)}.$$

Здесь $P_1(\theta)$, $P_2(\theta)$, $Q_1(\theta)$ и $Q_2(\theta)$ — многочлены с чисто мнимыми коэффициентами.

Далее, из уравнений (1,2) и (2,2) определяем функции

$$U_1'(\theta)=\frac{(2\theta^2-b^2)[\Phi(\theta)+U(\theta)]+2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,[\Psi(\theta)+V(\theta)]}{\sqrt{b+\theta}\,[(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2+\theta^2}]},$$

$$V_1'(\theta)=\frac{(2\theta^2-b^2)[\Phi(\theta)+U(\theta)]+2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,[\Psi(\theta)+V(\theta)]}{\sqrt{b+\theta}\,[(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}]}\,\frac{\sqrt{a^2-\theta^2}}{\theta},$$

$$U_2'(\theta)=\frac{2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,[\Phi(\theta)+U(\theta)]-(2\theta^2-b^2)[\Psi(\theta)+V(\theta)]}{\sqrt{b+\theta}\,[(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}]}\,\frac{\sqrt{b^2-\theta^2}}{\theta} \tag{2,4}$$

$$V_2'(\theta)=-\frac{2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,[\Phi(\theta)+U(\theta)]-(2\theta^2-b^2)[\Psi(\theta)+V(\theta)]}{\sqrt{b+\theta}\,[(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}]}.$$

3. Условия аналитического продолжения функций $U_1(\theta)$ и $V_1(\theta)$ через отрезок $-b<\xi<-a$ вещественной оси приводят к двум задачам Гильберта для функций $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$:

$$\Phi^+(\xi)=-G(\xi)\Phi^-(\xi)+g(\xi)\qquad(-b<\xi<-a); \tag{3,1}$$

$$\Psi^+(\xi)=G(\xi)\Psi^-(\xi)+g_1(\xi)\qquad(-b<\xi<-a). \tag{3,2}$$

$$g(\xi)=-(2\xi^2-b^2)\,\frac{(2\xi^2-b^2)[U^+(\xi)+U^-(\xi)]+2\xi\sqrt{b^2-\xi^2}\,[V^+(\xi)-V^-(\xi)]}{(2\xi^2-b^2)^2-4\xi^2\sqrt{a^2-\xi^2}\sqrt{b^2-\xi^2}}$$

$$g_1(\xi)=2\xi\sqrt{a^2-\xi^2}\,\frac{(2\xi^2-b^2)[U^+(\xi)-U^-(\xi)]+2\xi\sqrt{b^2-\xi^2}\,[V^+(\xi)+V^-(\xi)]}{(2\xi^2-b^2)^2-4\xi^2\sqrt{a^2-\xi^2}\sqrt{b^2-\xi^2}}, \tag{3,3}$$

$$G(\xi)=\frac{(2\xi^2-b^2)^2+4\xi^2\sqrt{a^2-\xi^2}\sqrt{b^2-\xi^2}}{(2\xi^2-b^2)^2-4\xi^2\sqrt{a^2-\xi^2}\sqrt{b^2-\xi^2}}.$$

Задача (3,2) имеет единственное решение, исчезающее на бесконечности. Это решение дается формулой [3]:

$$\Psi(\theta)=\frac{X(\theta)}{2\pi i}\int_{-b}^{-a}\frac{g_1(\xi)\,d\xi}{X^+(\xi)(\xi-\theta)}, \tag{3,4}$$

$$X(\theta)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-b}^{-a}\lg G(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi-\theta}\right\}. \tag{3,5}$$

Задача (3,1) допускает семейство решений, равных на бесконечности нулю. Требование голоморфности функций $U_1'(\theta)$ и $V_1'(\theta)$ в точке $\theta = -b$ определяет единственное решение задачи (3,1), исчезающее на бесконечности:

$$\Phi(\theta) = \frac{X(\theta)}{2\pi i} \frac{\sqrt{b+\theta}}{\sqrt{a+\theta}} \int_{-b}^{-a} \frac{\sqrt{a+\xi}}{\sqrt{b+\xi}} \frac{g(\xi)\,d\xi}{X^+(\xi)(\xi-\theta)}. \qquad (3,6)$$

Из ограниченности вектора $\mathbf{u}(x, y, t)$ в точке $x = y = 0$ следует, что $\pi i P_j(\theta) = A_i + B_j \theta$, $\pi i Q_j(\theta) = C_j + D_j \theta_j$ $(j = 1, 2)$, где B_j — известные и A_j, C_i, D_j — неизвестные вещественные постоянные. Далее, из краевых условий (1,3) следует, что функции (2,4) не должны иметь полюсов в точке $\theta = 0$. Это требование определяет коэффициенты A_j и дает два уравнения для определения коэффициентов C_j и D_j. Два других уравнения для определения коэффициентов C_j и D_j получаются из условия голоморфности функций (2,4) точке $\theta = -s$, где $(-s)$ есть один из двух вещественных корней уравнения

$$(2\theta^2 - b^2) + 4\theta^2 \sqrt{a^2 - \theta^2} \sqrt{b^2 - \theta^2} = 0; \quad -s < -b.$$

Тем же методом может быть решена двухмерная задача дифракции элементарной плоской поперечной волны

$$u = \sqrt{b^2 - c^2}\, s\,(t - cx + \sqrt{b^2 - c^2}\, y), \quad v = cs\,(t - cx + \sqrt{b^2 - c^2}\, y)$$

относительно полубесконечной прямолинейной щели $y = 0$, $x \geqslant 0$, свободной от напряжений, когда угол падения волны не превышает угла полного внутреннего отражения $(0 < c < a < b)$.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
4 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Фридман, ДАН, 60, № 7 (1948). [2] С. Л. Соболев, Некоторые вопросы теории распространения колебаний, в книге Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, гл. XII, 1937. [3] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946.