Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 1

АЭРОДИНАМИКА

А. М. ОБУХОВ

ПУЛЬСАЦИЯ ДАВЛЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 III 1949)

Вопрос о структуре поля давления в изотропном турбулентном потоке до настоящего времени в статистической теории турбулентности почти не исследовался. При выводе основного уравнения, связывающего вторые и третьи моменты поля скоростей несжимаемого потока, давление исключается ([1]), однако из этого нельзя делать вывод, что пульсации давления в изотропном турбулентном потоке равны нулю. Такое ошибочное заключение было сделано М. Д. Миллионщиковым ([2]). В настоящей работе мы укажем достаточно общий метод определения структурной функции давления (средний квадрат разности давления в двух точках как функция расстояния между точками) для изотропного турбулентного потока несжимаемой жидкости.

Воспользуемся известным выражением для оператора Лапласа поля давления в потоке несжимаемой жидкости. Если взять дивергенцию от правой и левой частей уравнений Навье — Стокса

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(v^\alpha v^\lambda) - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} + \nu \Delta v^\alpha, \tag{1}$$

то, принимая во внимание уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v^\omega}{\partial x^\omega} = 0, \tag{2}$$

получаем:

$$\frac{1}{\sigma}\Delta p = -\partial^2_{\alpha\beta}(v^\alpha v^\beta), \tag{3}$$

где v^α (все индексы пробегают значения 1, 2, 3) — компоненты скорости потока, p — давление, σ — плотность, ∂_α — символ дифференцирования по x^α; по одноименным индексам производится суммирование. В силу условия несжимаемости среды (2), уравнение (3) можно записать также в форме

$$\Delta p = -\sigma \partial_\alpha v^\beta \, \partial_\beta v^\alpha. \tag{4}$$

Предположим теперь, что поле скоростей и поле давления статистически однородно и изотропно. Умножим оператор Лапласа от давления Δp, определенный согласно уравнению (4), в точке M_1 на аналогичное выражение Δp в точке M_2 и осредним результат. Пользуясь при этом условием статистической однородности рассматриваемых полей, получаем:

$$\Delta^2 \left(\overline{p(M_1)\, p(M_2)}\right) = \sigma^2 \overline{\frac{\partial v^\alpha}{\partial \underset{1}{x}^\beta}(M_1) \frac{\partial v^\beta}{\partial \underset{1}{x}^\alpha}(M_1) \frac{\partial v^\gamma}{\partial \underset{2}{x}^\delta} \frac{\partial v^\delta}{\partial \underset{2}{x}^\gamma}}. \tag{5}$$

В левой части формулы (5) дифференцирование производится по координатам ξ^α вектора, соединяющего точки наблюдения M_1 и M_2 $(\xi^\alpha = \underset{2}{x}^\alpha - \underset{1}{x}^\alpha)$.

Вместо корреляционной функции поля давления $\overline{p(M_1) p(M_2)}$ удобно ввести структурную функцию

$$\Pi(\rho) = \overline{(p(M_2) - p(M_1))^2}, \tag{6}$$

которая для локально изотропного поля зависит только от расстояния ρ между точками наблюдения. Из уравнения (5) следует, что

$$\Delta^2 \Pi = \left(\frac{\partial^4}{\partial \rho^4} + \frac{4}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial \rho^3}\right) \Pi = -2\sigma^2 \overline{\frac{\partial v^\alpha}{\partial \underset{1}{x}^\beta} \cdot \frac{\partial v^\beta}{\partial \underset{1}{x}^\alpha} \cdot \frac{\partial v^\gamma}{\partial \underset{2}{x}^\delta} \cdot \frac{\partial v^\delta}{\partial \underset{2}{x}^\gamma}}. \tag{7}$$

Уравнение (7) позволяет определить структурную функцию поля давления, если известны четвертые моменты двухточечного типа поля скоростей или четвертые моменты производных поля скоростей. При этом мы будем рассматривать решение уравнения (7), удовлетворяющее дополнительным условиям:

а) при $\rho = 0$ $\Pi(\rho) = 0$;

б) при $\rho \to \infty$ $\frac{\Pi(\rho)}{\rho^2} \to 0$.

Для вычисления четвертых моментов производных поля скоростей воспользуемся гипотезой, впервые предложенной М. Д. Миллионщиковым в цитированной выше работе [2]. Мы будем предполагать, что четвертые моменты поля скоростей выражаются через вторые моменты так, как это имеет место при нормальном распределении Гаусса*. Как известно [3], для любых четырех статистических переменных w_1, w_2, w_3, w_4, связанных нормальной корреляцией, имеет место

$$\overline{w_1 w_2 w_3 w_4} = \overline{w_1 w_2} \cdot \overline{w_3 w_4} + \overline{w_1 w_3} \cdot \overline{w_2 w_4} + \overline{w_1 w_4} \cdot \overline{w_2 w_3}.$$

Применяя эту формулу к произведению производных поля скоростей, входящему в правую часть (7), получаем:

$$\Delta^2 \Pi(\rho) = -4\sigma^2 B^{\beta,\delta}_{\alpha,\gamma} B^{\alpha,\gamma}_{\beta,\delta}, \tag{8}$$

где

$$B^{\beta,\delta}_{\alpha,\gamma} = \overline{\frac{\partial v^\beta}{\partial \underset{1}{x}^\alpha}(M_1) \frac{\partial v^\delta}{\partial \underset{2}{x}^\gamma}(M_2)}.$$

При выводе формулы (8) использовано также известное свойство изотропного (локально-изотропного) поля скоростей:

$$\overline{\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}(M) \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha}(M)} = -\frac{1}{\sigma} \overline{\Delta p} = 0.$$

* Это допущение находит известное оправдание в измерениях Таунсенда [4], показавших, что экспериментально определенное значение четвертого момента для производной скорости потока отличается всего на 15% от значения этой величины, вычисленной при предположении о нормальном распределении. Средний квадрат производной в этих опытах непосредственно измерялся.

Введем специальное обозначение для структурной функции поля скоростей:

$$D^{\alpha\beta}(\vec{\xi}) = \overline{(v^{\alpha}(M_2) - v^{\alpha}(M_1))(v^{\beta}(M_2) - v^{\beta}(M_1))}. \tag{9}$$

Для локально-изотропного поля скоростей ([5]) структурный тензор $D^{\alpha\beta}(\vec{\xi})$ имеет вид

$$D^{\alpha\beta}(\vec{\xi}) = D_{nn}(\rho)\,\delta^{\alpha\beta} + \left(\frac{D_{nn} - D_{ll}}{\rho^2}\right)\xi^{\alpha}\xi^{\beta}, \tag{10}$$

где D_{nn} и D_{ll} (продольная и поперечная структурные функции поля скоростей) связаны условием несжимаемости потока:

$$D_{nn} = \frac{\rho}{2} D_{ll}' + D_{ll}. \tag{11}$$

Корреляционные функции $B_{\alpha,\gamma}^{\beta,\delta}$ для производных поля скоростей непосредственно выражаются через производные тензора $D^{\alpha\beta}(\vec{\xi})$:

$$B_{\alpha,\gamma}^{\beta,\delta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^{\alpha}\partial\xi^{\beta}} D^{\beta\delta}(\vec{\xi}). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (8), получаем уравнение для определения структурной функции поля давления по заданной структурной функции поля скоростей:

$$\Delta^2\Pi(\rho) = -\sigma^2 \frac{\partial^2 D^{\beta\delta}}{\partial\xi^{\alpha}\partial\xi^{\gamma}} \cdot \frac{\partial^2 D^{\alpha\gamma}}{\partial\xi^{\beta}\partial\xi^{\delta}}. \tag{13}$$

В связи с результатами работ А. Н. Колмогорова ([5], [6]) и А. М. Обухова ([7], [8]) представляет интерес вычисление структурной функции поля давления для поля скоростей, в котором структурные функции D_{nn} и D_{ll} пропорциональны расстоянию ρ в степени две трети:

$$D_{ll} = b^2\rho^{2/3}, \qquad D_{nn} = \frac{4}{3} b^2\rho^{2/3}$$

и, соответственно этому:

$$D^{\alpha\beta} = \frac{4}{3}\rho^{2/3}\delta^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\rho^{-4/3}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}, \tag{14}$$

где b — некоторая константа, теоретически связанная со средней диссипацией энергии в рассматриваемом потоке ([7]). Подставляя выражение структурного тензора (14) в уравнение (13) и опуская промежуточные выкладки, получаем:

$$\Delta^2\Pi(\rho) = -\frac{56}{81}\sigma^2 b^4 \rho^{-8/3}. \tag{15}$$

Будем искать решение уравнения (15) в форме $\Pi(\rho) = K\rho^n$. В этом случае

$$\Delta^2\Pi(\rho) = (n-2)(n-1)\,n\,(n+1)\,K\rho^{n-4},$$

откуда следует, что $n = 4/3$, $K = \sigma^2 b^4$.

Таким образом, для рассмотренной выше схемы локально-изотропного турбулентного потока структурная функция поля давления пропорциональна квадрату продольной компоненты структурной функции поля скоростей:

$$\Pi(\rho) = \sigma^2 [D_{ll}(\rho)]^2, \tag{16}$$

где σ — плотность среды *.

Вопрос о пульсациях давления в турбулентном потоке, повидимому, связан с проблемой взаимодействия звукового поля и турбулентности (вихревая компонента поля скоростей), однако с точки зрения акустики турбулентного потока представляет интерес не только пространственная структура, но также и временной спектр турбулентных пульсаций давления.

Указанный выше метод может быть применен также для расчета корреляции поля давления и квадратичных характеристик поля скоростей в изотропном турбулентном потоке (для вычисления моментов типа $B^{\eta,\alpha\beta} = \overline{p(M_1)\, v^\alpha(M_2)\, v^\beta(M_2)}$).

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
10 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Г. Лойцянский, Тр. ЦАГИ, № 440 (1939). [2] М. Д. Миллионщиков, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофизич., № 4—5 (1941). [3] L. Isserlis, Biometrica, **12**, 138 (1918). [4] A. A. Townsend, Proc. Cambr. Phil. Soc., **44**, 568 (1948). [5] А. Н. Колмогоров, ДАН, **30**, № 4 (1941). [6] А. Н. Колмогоров, ДАН, **32**, № 1 (1941). [7] А. М. Обухов, ДАН, **32**, № 1 (1941); Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4—5 (1941). [8] А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. физ., **6**, № 1—2 (1942). [9] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., 1947.

* Пропорциональность структурной функции поля давления квадрату произведения плотности среды на структурную функцию поля скоростей может быть получена также из элементарных соображений теории размерностей ([9]).