Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

И. Л. РАУХВАРГЕР

ОБ УПЛОТНЕНИИ В КОМПАКТЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 III 1949)

В настоящее время в различных областях математики большую роль играют компактные метрические пространства (компакты). Поэтому естественный интерес представляет вопрос о возможности уплотнения, т. е. взаимно-однозначного и непрерывного отображения метрических пространств на компакты. В настоящей работе даются некоторые условия, достаточные для уплотняемости метрических пространств со счетной базой в компакты.

Если пространство X уплотняется в компакт, то, как известно, это отображение можно продолжить на чеховское расширение пространства X — на бикомпакт βX. Но бикомпакт βX — очень сложное пространство, обычно неметризуемое. Оказывается, однако, что для всякого компактного уплотнения Z пространства X имеется компактное расширение Y пространства X, $Y = Y[X]$*, непрерывно отображающееся на Z так, что это отображение на X является уплотнением. Именно, имеет место следующая

Теорема 1. *Если метрическое пространство X со счетной базой уплотняется в компакт Z с помощью отображения f, то сутествует такое компактное расширение Y пространства X, что непрерывное отображение f может быть продолжено на все Y.*

Доказательство. Как показал П. С. Урысон ([1]), всякое нормальное пространство со счетной базой можно гомеоморфно включить в компакт I_ω (гильбертов параллелепипед) с помощью некоторой счетной системы действительных функций. Пусть $\{\varphi_n'(x)\}$ есть последовательность действительных функций определяющая гомеоморфное включение X в I_ω, и $\{\varphi_n''(z)\}$ — последовательность функций, определяющая гомеоморфное включение Z в I_ω. Так как $Z = f(X)$, то $\varphi_n''(z)$ можно рассматривать и как непрерывную функцию, определенную на X, если положить $\varphi_n''(x) = \varphi_n''(f(x))$. Поэтому, если мы положим

$$\varphi_{2n}(x) = \frac{\varphi_n''(x)}{2}, \qquad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\varphi_n'(x)}{2},$$

то последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ будет определять гомеоморфное отображение f_1 пространства X на X^*, $f_1(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots) \in I_\omega$. Отображение f X в I_ω, $f(x) = (0, \varphi_2(x), 0, \ldots, 0, \varphi_{2n}(x), 0, \ldots)$, будет данным нам уплотнением f, переводящим X в компакт Z^*, гомеоморфный Z. Обозначим через Y замыкание X^* в I_ω.

Определим теперь непрерывное отображение f_0 компакта Y на компакт Z^*: $y = (a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in Y$, $y \to f_0(y) = (0, a_2, 0, \ldots, 0, a_{2n}, 0, \ldots)$. Очевидно, $f_0(X^*) = Z^*$, откуда $f_0(Y) = Z^*$ (так как X^* всюду плотно в Y), т. е. f_0 и будет искомым продолжением на компактное расширение Y уплотнения f.

---

* Если M есть множество, лежащее в пространстве R, то через $R[M]$ обозначаем замыкание множества M в пространстве R.

Из этой теоремы следует, что вопрос об уплотняемости пространств в компакты можно решать с помощью специальных непрерывных разбиений ([2]) компактных расширений.

Теорема 2. *Если пространство X не более чем счетным множеством A может быть дополнено до компакта Y, то X уплотняется в компакт.*

Можно предполагать, что A счетно и X всюду плотно в Y; упорядочим A в простую последовательность $A = \{a_n\}$ и построим в X последовательность $B = \{b_n\}$, конфинальную последовательности A: $\rho(a_n, b_n) < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, откуда

$$\lim_{k \to \infty} \rho(a_{n_k}, b_{n_k}) = 0.$$

Построим теперь новое пространство Z с помощью непрерывного разбиения компакта Y; элементами разбиения будут точки из $X \setminus B$ и пары (a_n, b_n). Это разбиение определяет уплотнение X в компакт Z.

На основании этой теоремы множество иррациональных чисел можно уплотнить в одномерный континуум, а также в n-мерный континуум и в бесконечномерный компакт.

Приведем две теоремы, эквивалентные теореме 2.

Теорема 3. *Если $X \subset Y$, Y — компакт и множество $Y \setminus X$ удовлетворяет условиям:*

1° $Y \setminus X = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n \cap F_k = 0$, F_n — *компакт*, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

2° $\lim\limits_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0$,

то X уплотняется в компакт.

Теорема 4. *Множество X, дополняемое нульмерным множеством типа F_σ до компакта, уплотняется в компакт.*

Следствие. Всякая G_δ, лежащая на прямой (в частности, всякая нульмерная G_δ), уплотняется в компакт.

Следующие две теоремы дают новые достаточные для уплотняемости в компакт условия.

Теорема 5. *Если метрическое пространство со счетной базой X содержит абсолютный ретракт B и*

1° *B содержит множество N всех точек некомпактности X;*

2° *N является компактом,*

то X уплотняется в компакт.

Доказательство. Возьмем произвольное компактное расширение Y пространства X, т. е. Y — компакт и X всюду плотно в Y. Построим непрерывное отображение f пространства Y на некоторый компакт Z, причем это отображение будет уплотнять X на Z. Сделаем это следующим образом. Рассмотрим компакт $Y[Y \setminus X]$, лежащий в Y и пересекающийся с пространством X по компакту N. Будем считать тождественное отображение f компакта N на себя непрерывным отображением замкнутого подмножества N компакта $Y[Y \setminus X]$ в абсолютный ретракт B. Так как B есть абсолютный ретракт, то это отображение можно продолжить в непрерывное отображение f всего компакта $Y[Y \setminus X]$ в B.

Отображение f переводит точки множества $Y \setminus X$ в точки, лежащие в X: $f(Y \setminus X) \subset B \subset X$, т. е. оно переводит компакт Y в компакт Z, который и является уплотнением пространства X.

Теорема 6. *Локально-связное метрическое пространство X со счетной базой, каждая компонента которого содержит лишь конечное число точек некомпактности, уплотняется в компакт.*

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма. *Если каждая компонента локально-связного простран-*

ства со счетной базой уплотняется в компакт, то пространство уплотняется в компакт.

Известно, что каждая компонента локально-связного пространства открыта в нем. Поэтому пространство распадается в сумму не более. чем счетного числа попарно непересекающихся слагаемых, одновременно открытых и замкнутых в нем,— компонент U_n пространства X, $X = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n \cap U_k = 0$. Так как каждая компонента U_n уплотняется с помощью отображения f_n в компакт F_n, то пространство X уплотняется отображением f в пространство Z типа F_σ, состоящее из счетного числа непересекающихся компактов F_n; отображение f определяется условием: для $x \in U_n$ $f(x) = f_n(x) \in F_n$. Можно взять F_n такими, чтобы $\lim_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0$, и расположить их так, чтобы они сходились в некоторой точке y, $y \in Z$. Тогда Z становится компактом, и отображение f будет уплотнением пространства X в компакт.

Перейдем к доказательству теоремы. Будем уплотнять отдельно каждую компоненту пространства X. Итак, имеем связное локально-связное метрическое пространство X_0 с конечным множеством точек некомпактности $N = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Так как X_0 есть пространство типа G_δ (вследствие конечности множества N), то всякие две его точки лежат на простой дуге. Обозначим через l_i, $l_i = l_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, простую дугу, соединяющую точку a_i с точкой a_{i+1}. Тогда $L = \bigcup_{i=1}^{n-1} l_i$ будет жордановой кривой, лежащей в пространстве X_0. Возьмем произвольное компактное расширение Y пространства X_0 и отрезок $I = \{t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ вне компакта Y. Отметим на I n точек $0 = b_1 < b_2 < \ldots < b_n = 1$. Рассмотрим компакт $Y_1 = Y + I$ и произведем в нем непрерывное разбиение, элементами которого будут отдельные точки y, $y \in Y \setminus N$, точки t, $t \neq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и пары (a_i, b_i), т. е. приклеим отрезок I к компакту Y, склеив точку b_i с точкой a_i $(i \leqslant n)$. Конечное множество N принадлежит теперь и компакту $Y_1[Y_1 \setminus X]$, и абсолютному ретракту — отрезку I. Тождественное отображение N на себя продолжим в отображение компакта $Y_1[Y_1 \setminus X]$ в отрезок I (это отображение определяется непрерывной действительной функцией, определенной на компакте $Y_1[Y_1 \setminus X]$ и принимающей в точке a_i значение b_i). Мы получим компакт Y_2, состоящий из уплотнения X^* исходного пространства X и отрезка I, к которому приклеились все точки из $Y_1 \setminus X$. Отрезок I точками $b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}$ разбит на $n-1$ отрезков: $I_1 = [(a_1, b_1), (a_2, b_2)], \ldots, I_{n-1} = [(a_{n-1}, b_{n-1}), (a_n, b_n)]$. Пара точек (a_i, b_i) и (a_{i+1}, b_{i+1}) из X^* соединена в Y_2 двумя простыми дугами — дугой l_i, лежащей в X^*, и отрезком I_i. Для каждого i, $i \leqslant n-1$, непрерывно отобразим отрезок I_i на простую дугу l_i так, чтобы концы отрезка — точка (a_i, b_i) и точка (a_{i+1}, b_{i+1}) — оставались на месте. Тем самым отрезок I отобразится в жорданову кривую $L = \bigcup_{i=1}^{n-1} l_i$, где $L \subset X^*$, т. е. компакт Y_2 непрерывно (и взаимно-однозначно на X^*) отобразится в компакт X^{**}, где X^{**} будет уплотнением X^*, а значит, и исходного пространства X_0. Итак, компонента X_0 пространства X уплотняется в компакт, следовательно, на основании леммы мы сможем уплотнить в компакт и все пространство X.

Поступило
2 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948, стр. 308. [2] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М.-Л., 1947, стр. 42.