Доклады Академии Наук СССР
1949, Том LXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Ф. А. НЕЙМАРК

О РАСШИРЕНИИ ЭРМИТОВА ОПЕРАТОРА ДО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО С ДАННЫМ ЭРМИТОВЫМ ОПЕРАТОРОМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 III 1949)

В настоящей заметке дается решение следующей задачи, поставленной А. Я. Повзнером. Пусть A — ограниченный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, B — ограниченный эрмитов оператор в подпространстве $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$. При каких условиях можно продолжить B до ограниченного эрмитова оператора B' в $\mathfrak{H}$, перестановочного с A? Мы дадим два решения этой задачи.

I. Обозначим через $\mathfrak{N}$ минимальное подпространство в $\mathfrak{H}$, содержащее $\mathfrak{M}$ и инвариантное относительно A; $\mathfrak{N}$ есть замкнутая линейная оболочка всех конечных сумм вида

$$\xi = \sum_k A^k \xi_k, \qquad \xi_k \in \mathfrak{M}. \tag{a}$$

Предположим теперь, что искомый оператор B' существует. Тогда, при любых ξ, $h \in \mathfrak{H}$, должно быть $(A^k B' \xi, \eta) = (B' A^k \xi, \eta) = (A^k \xi, B' \eta)$. В частности, при $\xi, \eta \in \mathfrak{M}$

$$(A^k B \xi, \eta) = (A^k \xi, B\eta). \tag{1}$$

Таким образом, при существовании оператора B' операторы A и B должны удовлетворять условию (1) для всех $\xi, \eta \in \mathfrak{M}$ и натуральных k.

Пусть теперь условие (1) выполнено. Тогда искомый оператор B' однозначно определен на $\mathfrak{N}$. Действительно, для $\xi = \sum\limits_k A^k \xi_k$ должно быть

$$B'\xi = \sum_k B' A^k \xi_k = \sum_k A^k B' \xi_k, \text{ т. е. } B'\xi = \sum_k A^k B \xi_k. \tag{2}$$

Поэтому строим оператор B' в $\mathfrak{N}$, определяя его на суммах (a) равенством (2). При этом оператор B' не зависит от вида (a) представления элемента ξ. Для доказательства этого заметим, что, в силу (1),

$$(B'\xi, \eta) = \left(\sum_k A^k B \xi_k, \quad \sum_l A^l \eta_l\right) = \sum_{k,l} (A^{k+l} B \xi_k, \eta_l) =$$

$$= \sum_{k,l} (A^{k+l} \xi_k, B\eta_l) = \sum_{k,l} (A^k \xi_k, A^l B \eta_l) = (\xi, B'\eta). \tag{3}$$

Если поэтому $\xi = 0$, то из (3) следует, что $(B'\xi, \eta) = 0$ для всех η вида (a). Так как они плотны в $\mathfrak{N}$, то $B'\xi = 0$ при $\xi = 0$. Следовательно, оператор B' определен в $\mathfrak{N}$ однозначно и, кроме того, из (3) следует, что он эрмитов. Для его ограниченности необходимо и достаточно, чтобы для некоторой константы C было

$$\left| \sum_k A^k B \xi_k \right| \leqslant C \left| \sum_k A^k \xi_k \right| \tag{4}$$

для всех конечных систем $\xi_k \in \mathfrak{M}$ и всех показателей k.

Таким образом, оператор B' определяется в $\mathfrak{N}$ однозначно. В $\mathfrak{H}-\mathfrak{N}$ в качестве B', очевидно, можно взять произвольный ограниченный эрмитов оператор, перестановочный с A. Это даст общий вид всех ограниченных эрмитовых продолжений оператора B, перестановочных с A. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы ограниченный эрмитов оператор B в подпространстве $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{H}$ можно было продолжить до ограниченного эрмитова оператора B' в $\mathfrak{H}$, перестановочного с данным ограниченным эрмитовым оператором A в $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (1) *и* (4).

II. Полагая $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1+\mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}-\mathfrak{M}$, мы можем оператор A представить в матричной форме

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\ \text{где } A_{21}=A_{12}^*,\ A_{11},\ A_{22} \text{ эрмитовы.}$$

Искомый оператор B' приводится пространством $\mathfrak{H}_1$, следовательно, и $\mathfrak{H}_2$. Поэтому его матрица имеет „диагональный“ вид:

$$B'=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{pmatrix},\quad \text{где } C \text{ эрмитов.}$$

Отсюда

$$AB'=\begin{pmatrix}A_{11}B & A_{12}C\\ A_{21}B & A_{22}C\end{pmatrix},\qquad B'A=\begin{pmatrix}BA_{11} & BA_{12}\\ CA_{21} & CA_{22}\end{pmatrix}.$$

Значит, для перестановочности B' с A должны удовлетворяться следующие условия:

$$A_{11}B=BA_{11}, \tag{5a}$$
$$A_{12}C=BA_{12}, \tag{5b}$$
$$A_{22}C=CA_{22}, \tag{5c}$$
$$A_{12}^*B=CA_{12}^*. \tag{5d}$$

Условие (5d), очевидно, является следствием условия (5b). Имеем

$$A_{12}A_{12}^*B=A_{12}CA_{12}^*=BA_{12}A_{12}^*. \tag{6}$$

Положим $A_{12}=HU$, где $H=\sqrt{A_{12}A_{12}^*}$; U — частично изометричный оператор с начальной областью $\overline{R}_{A_{12}^*}$ и конечной областью $\overline{R}_{A_{12}}$ (см. ([1])). Тогда имеет место равенство $BH=HB$.

Подставив в соотношение (5b) вместо A_{12} произведение HU, получим $HUC=BHU$, или же, перейдя к сопряженным: $CU^*H=U^*HB$, откуда

$$CU^*H=U^*BH. \tag{7}$$

Обозначим $\overline{R}_{A_{12}}=\mathfrak{M}_1$; $\mathfrak{H}_1-\mathfrak{M}_1=\mathfrak{N}_1$; тогда $\overline{R}_H=\overline{R}_{A_{12}}=\mathfrak{M}_1$. Так как оператор H эрмитов, то $H(\mathfrak{H}_1-\overline{R}_H)=0$; следовательно, соотношение (7) автоматически выполняется на $\mathfrak{H}_1-\mathfrak{M}_1$. Посмотрим, что оно означает на множестве $\mathfrak{M}_1$. Для любого элемента ξ $CU^*H\xi=U^*BH\xi$, откуда $CU^*=U^*B$ на $\overline{R}_H$. Так как $U\xi\in\overline{R}_H$, то $CU^*U\xi=U^*BU\xi$, т. е. $CU^*U=U^*BU$. Обозначим $\overline{R}_{A_{12}^*}=\mathfrak{M}_2$; $\mathfrak{H}_2-\mathfrak{M}_2=\mathfrak{N}_2$. Тогда из теоремы Неймана ([1]) следует, что U^*U есть проектирующий оператор пространства $\mathfrak{M}_2$. Следовательно, на $\mathfrak{M}_2$ имеем $C=U^*BU$.

Таким образом, оператор C определен нами не на всем $\mathfrak{H}$, а только на его части $\mathfrak{M}_2$, что произошло в результате того, что оператор A_{12}^* имеет нулевое подпространство. Поэтому остается теперь решить следующую задачу. $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{M}_2+\mathfrak{N}_2$; дан эрмитов оператор A_{22} в $\mathfrak{H}_2$ и эрмитов оператор C в $\mathfrak{M}_2$. Требуется расширить оператор C до эрмитова оператора в $\mathfrak{H}_2$, перестановочного с A_{22} (в силу (5с)).

Таким образом, мы снова приходим к нашей исходной задаче, для решения которой проводим все предыдущие рассуждения. Обозначим $\mathfrak{H}_1 = \tilde{\mathfrak{H}}_1$; $\overline{R}_{A_{12}^*} = \tilde{\mathfrak{H}}_2$; тогда $A_{12}(\mathfrak{H}_2 - \tilde{\mathfrak{H}}_2) = 0$. Далее положим $\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}_2 - \tilde{\mathfrak{H}}_2$; $\mathfrak{H}_2 = \tilde{\mathfrak{H}}_2 + \mathfrak{H}_3$, так что $A_{12}\mathfrak{H}_3 = 0$. Тогда можно положить:

$$A_{22} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где A_{23} — ограниченный оператор из $\mathfrak{H}_3$ в $\tilde{\mathfrak{H}}_2$, $\tilde{A}_{22}$ — оператор в $\tilde{\mathfrak{H}}_2$. Далее положим $\tilde{\mathfrak{H}}_3 = \overline{R}_{A_{23}^*}$; тогда $A_{23}(\mathfrak{H}_3 - \tilde{\mathfrak{H}}_3) = 0$ и т. д. Вообще,

$$\tilde{\mathfrak{H}}_n = \overline{R}_{A^*_{n-1,\,n}};\quad \mathfrak{H}_{n+1} = \mathfrak{H}_n - \tilde{\mathfrak{H}}_n;\quad A_{nn} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{nn} & A_{n,\,n+1} \\ A_{n+1,\,n} & A_{n+1,\,n+1} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что пространство $\tilde{\mathfrak{H}} = \tilde{\mathfrak{H}}_1 + \tilde{\mathfrak{H}}_2 + \cdots + \tilde{\mathfrak{H}}_n + \cdots$ инвариантно относительно оператора A. Каждый элемент из $\tilde{\mathfrak{H}}$ есть предел элементов вида $\tilde{f} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \cdots + \tilde{f}_n$, где $\tilde{f}_k \in \tilde{\mathfrak{H}}_k$. Поэтому достаточно доказать, что всегда $A\tilde{f}_k \in \tilde{\mathfrak{H}}$, ибо оператор A ограничен, а значит и непрерывен. Но $A\tilde{f}_1 = Af_1 = A_{11}f_1 + A_{21}f_1 = A_{11}f_1 + A_{12}^*f_1$; $A_{11}f_1 \in \tilde{\mathfrak{H}}_1$; $A_{12}^*f_1 \in \tilde{\mathfrak{H}}_2 = \overline{R}_{A_{12}^*}$. Следовательно, $A\tilde{f}_1 \in \tilde{\mathfrak{H}}_1 + \tilde{\mathfrak{H}}_2 \subset \tilde{\mathfrak{H}}$.

Далее, $A\tilde{f}_2 = A_{12}\tilde{f}_2 + A_{22}\tilde{f}_2 = A_{12}\tilde{f}_2 + \tilde{A}_{22}\tilde{f}_2 + A_{32}\tilde{f}_2 = A_{12}\tilde{f}_2 + \tilde{A}_{22}\tilde{f}_2 + A_{23}^*\tilde{f}_2$. Так как $A_{12}\tilde{f}_2 \in \tilde{\mathfrak{H}}_1$; $\tilde{A}_{22}\tilde{f}_2 \in \tilde{\mathfrak{H}}_2$; $A_{23}^*\tilde{f}_2 \in \tilde{\mathfrak{H}}_3 = \overline{R}_{A_{23}^*}$, то, следовательно, $A\tilde{f}_2 \in \tilde{\mathfrak{H}}_1 + \tilde{\mathfrak{H}}_2 + \tilde{\mathfrak{H}}_3 \subset \tilde{\mathfrak{H}}$.

Далее, $A\tilde{f}_3 = A_{12}\tilde{f}_3 + A_{22}\tilde{f}_3 = A_{22}\tilde{f}_3$, так как $A_{12}\tilde{f}_3 = 0$, ибо $\tilde{f}_3 \in \tilde{\mathfrak{H}}_3$; $A_{12}\mathfrak{H}_3 = 0$. Поэтому, в силу (8), $A\tilde{f}_3 = \tilde{A}_{23}\tilde{f}_3 + A_{33}\tilde{f}_3 = \tilde{A}_{23}\tilde{f}_3 + \tilde{A}_{33}\tilde{f}_3 + A_{43}\tilde{f}_3 = \tilde{A}_{23}\tilde{f}_3 + \tilde{A}_{33}\tilde{f}_3 + A_{34}^*\tilde{f}_3 \in \tilde{\mathfrak{H}}_2 + \tilde{\mathfrak{H}}_3 + \tilde{\mathfrak{H}}_4 \subset \tilde{\mathfrak{H}}$.

Совершенно аналогично можно показать, что $A\tilde{f}_n \subset \tilde{\mathfrak{H}}$. Таким образом, пространство $\tilde{\mathfrak{H}}$ действительно инвариантно относительно A.

Оператор A в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}$ представляется бесконечной матрицей операторов:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13}\ldots \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \text{ где } \tilde{A}_{ii} \text{ — эрмитовы, } \tilde{A}_{ik} = \tilde{A}_{ki}^*.$$

Однако легко видеть, что все $\tilde{A}_{ik}$ при $|i-k| \geqslant 2$ будут нулевыми операторами. Возьмем хотя бы $\tilde{A}_{13}, \tilde{A}_{14}, \ldots$ Они представляют собою оператор A_{12} на пространствах $\tilde{\mathfrak{H}}_3, \tilde{\mathfrak{H}}_4, \ldots$, но $\tilde{\mathfrak{H}}_3 + \tilde{\mathfrak{H}}_4 + \ldots$ есть ортогональное дополнение подпространства $\tilde{\mathfrak{H}}_2 = \overline{R}_{A_{12}^*}$ в пространстве $\mathfrak{H}_2$, а потому является нулевым подпространством для оператора A_{12}. Таким образом, A представляется бесконечной матрицей Якоби

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & 0 & 0 & 0\ldots \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & 0 & 0\ldots \\ 0 & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \text{ где } \tilde{A}_{ii} \text{ — эрмитовы, } \tilde{A}_{i+1,\,i} = \tilde{A}^*_{i,\,i+1}. \tag{9}$$

Матрица искомого оператора B' будет иметь диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & B_2 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & B_3 & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \text{ где } B_1 = B; \quad B_i \text{ — эрмитовы.}$$

Условия перестановочности будут иметь вид

$$B_i A_{ii} = A_{ii} B_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots; \tag{10}$$

$A_{12} B_2 = B_1 A_{12}$, $A_{23} B_3 = B_2 A_{23}$. Вообще,

$$A_{i,\, i+1} B_{i+1} = B_i A_{i,\, i+1}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots \tag{10a}$$

Перейдя к сопряжениям, получим: $A^*_{i,\, i+1} B_i = B_{i+1} A^*_{i,\, i+1}$, откуда $A_{i,\, i+1} A^*_{i,\, i+1} B_i = A_{i,\, i+1} B_{i+1} A^*_{i,\, i+1} = B_i A_{i,\, i+1} A^*_{i,\, i+1}$, т. е.

$$A_{i,\, i+1}, A^*_{i,\, i+1} B_i = B_i A_{i,\, i+1} A^*_{i,\, i+1}. \tag{11}$$

На основании теоремы Неймана [1] $A_{i,\, i+1} = H_i U_i$, где H_i — эрмитов в $\mathfrak{H}_i$, U_i — частично-изометричный оператор с начальной областью $\bar{R}_{A^*_{i,\, i+1}} = \mathfrak{H}_{i+1}$ и конечной областью $\bar{R}_{A_{i,\, i+1}}$; $H_i = \sqrt{A_{i,\, i+1} A^*_{i,\, i+1}}$.

Тогда условие (11) перепишется в виде

$$H_i B_i = B_i H_i. \tag{12}$$

Подставим значение оператора $A_{i,\, i+1}$ в условие (10a). Тогда получим $H_i U_i B_{i+1} = B_i H_i U_i$, или, перейдя к сопряжениям, $B_{i+1} U_i^* H_i = U_i^* H_i B_i$, откуда $B_{i+1} U_i^* H_i = U_i^* B_i H_i$. Таким образом, $B_{i+1} U_i^* = U_i^* B_i$ на $\bar{R}_{H_i}$. Так как для любого $\xi \in \mathfrak{H}_{i+1}$ $U_i \xi \in \bar{R}_{H_i}$, то $B_{i+1} U_i^* U_i \xi = U_i^* B_i U_i \xi$, т. е. $B_{i+1} U_i^* U_i = U_i^* B_i U_i$ на $\mathfrak{H}_{i+1}$.

Так как $U_i^* U_i$ есть проектирующий оператор пространства $\mathfrak{H}_{i+1}$, то на $\mathfrak{H}_{i+1}$ $U_i^* U_i = 1$. Следовательно, $B_{i+1} = U_i^* B_i U_i$ в $\mathfrak{H}_{i+1}$. Таким образом, мы получим рекурентные формулы для определения B_i:

$$B_2 = U_1^* B_1 U_1; \quad B_3 = U_2^* B_2 U_2 = U_2^* U_1^* B_1 U_1 U_2; \ldots,$$
$$B_i = U_i^* U_{i-1}^* \ldots U_1^* B_1 U_1 U_2 \ldots U_i.$$

Если обозначим $U_1 U_2 \ldots U_i = V_i$, окончательно получим: $B_i = V_i^* B_1 V_i$.

Подставляя это выражение для B_i в условия (10) и (12), мы получим в окончательном виде условия

$$V_i^* B_1 V_i A_{ii} = A_{ii} V_i^* B_1 V_i; \quad H_i V_i^* B_1 V_i = V_i^* B_1 V_i H_i, \tag{13}$$

которым должен удовлетворять оператор B_1.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченный эрмитов оператор B в подпространстве $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ можно было бы продолжить до ограниченного эрмитова оператора B' в $\mathfrak{H}$, перестановочного с данным ограниченным эрмитовым оператором A в $\mathfrak{H}$, представляемым матрицей* (9), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (13).

Одесский технологический институт
консервной промышленности

Поступило
2 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. v. Neumann, Ann. of Math., **33**, 294 (1932).