

Научная статья

УДК 517.958:531.32

doi: 10.17223/19988621/88/12

Разрывное конически симметричное течение идеальной несжимаемой жидкости

Олег Никифорович Шабловский

*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого,
Гомель, Республика Беларусь, shablovsky-on@yandex.ru*

Аннотация. Построено точное частное конически симметричное решение уравнений Эйлера, определяющих стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости. Изучено течение, содержащее гидродинамический источник / сток и сильный разрыв, на котором происходит скачок плотности жидкости. Выполнен сравнительный анализ свойств источника и стока. Установлены качественные различия между этими течениями, проявляющиеся в геометрической конфигурации непротекаемых границ, а также в закономерностях поведения давления и скорости жидкости.

Ключевые слова: гидродинамический источник и сток, сильный разрыв течения, скачок плотности, возрастание энтропии, ротор завихренности

Для цитирования: Шабловский О.Н. Разрывное конически симметричное течение идеальной несжимаемой жидкости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 149–163. doi: 10.17223/19988621/88/12

Original article

A discontinuous conically symmetric flow of an ideal incompressible fluid

Oleg N. Shablovskiy

*Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus,
shablovsky-on@yandex.ru*

Abstract. The Euler equations are considered in spherical coordinates to describe the steady flow of an ideal incompressible fluid. An exact conically symmetric solution based on the source/sink and strong conic discontinuity with an apex in zero of the coordinate system is obtained. The northern region of the flow is situated in the finite vicinity of the symmetry axis, i.e., within a discontinuity cone, where the solution is regular and vortex-free. On the other side of the discontinuity, the flow adjoins the permeable equator plane. In this region, the flow is vortex-like, and its properties are determined by a density jump. The fluid flowing through the discontinuity is governed by the increase of entropy principle. The thermal field corresponding to the flow is presented. It shows that the spatial

heterogeneity of temperature results from the interaction between the azimuth vorticity component and the meridional velocity component. A strong discontinuity cone angle is revealed to be a significant parameter of the problem. A comparative analysis of the source and sink properties is performed. The considered flows qualitatively differ in terms of pressure and velocity behavior.

Keywords: hydrodynamic source and sink, strong flow discontinuity, density jump, entropy increase, vorticity rotor

For citation: Shablovskiy, O.N. (2024) A discontinuous conically symmetric flow of an ideal incompressible fluid. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 149–163. doi: 10.17223/19988621/88/12

Введение

В сферической системе координат (r, θ, φ) стационарное конически симметричное движение идеальной несжимаемой жидкости определяется уравнениями [1]

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad (1)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} v_\theta^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (3)$$

Здесь r – радиальная координата; θ – полярный угол; в осесимметричном случае $(\partial/\partial\varphi \equiv 0)$ течение не зависит от азимутального угла φ ; v_r, v_θ – компоненты вектора скорости; $v_\varphi \equiv 0$; ρ – плотность; p – давление. Уравнение энергии, соответствующее невязкому нетеплопроводному течению, имеет вид:

$$\rho c_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = q_v, \quad (4)$$

где T – температура; c_p – удельная теплоемкость; $q_v = q_v(T)$ – мощность источников тепла.

Вопрос о сравнении свойств источника и стока ассоциируется с проблемой гистерезисных явлений, наблюдаемых в аэрогидродинамике. Укажем несколько основных работ, относящихся к этой теме. В [2] проведено экспериментальное исследование гистерезисов в положении областей потери устойчивости течения в вихревых жгутах, образующихся вблизи передних кромок треугольного крыла. Описание гистерезисных функций аэродинамических сил и моментов, зависящих от угла атаки, выполнено в [3]. В статье [4] изучено явление гистерезиса при взаимодействии ударных волн, возникающих перед системой тел в сверхзвуковом потоке. Важным является вопрос о неединственности численных решений уравнений Эйлера и Навье–Стокса [5]: неединственность проявляется в получении несимметричных решений симметричной задачи с использованием симметричных алгоритмов, и это приводит к гистерезисным явлениям по начальным данным дифференциальной задачи, т.е. по стартовым условиям дискретного алгоритма при расчете обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Гистерезисные переходы в закрученных течениях вязкой несжимаемой жидкости изучались ана-

литически и численно в [6, 7]. В [8] исследованы закономерности движения системы точечных либо распределенных стоков и источников в идеальной жидкости. В книге [9] обращено внимание на неэквивалентность источников и стоков импульса для автомодельного турбулентного следа. Современное состояние и перспективы исследований задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости при наличии точечного источника в области течения представлены в [10]. Основные результаты разработки теории уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости изложены в обзоре [11].

Цель работы: для системы уравнений (1)–(3) построить точное частное решение, описывающее источник / сток жидкости; проанализировать условия, в которых проявляются различия между источником и стоком.

Точное решение

Рассмотрим на основе уравнений (1)–(3) класс движений

$$v_r = G/r, v_\theta = -B/r, r > 0,$$

где функции $G = G(\theta)$, $B = B(\theta)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{dB}{d\theta} + B \operatorname{ctg} \theta = G, \quad B \frac{dG}{d\theta} + G^2 = B_1 \equiv \text{const}, \quad (5)$$

B_1 – произвольная постоянная. Обсудим примеры точных частных решений уравнений (5). Пусть $G^2 = B_1 > 0$. Сначала возьмем $G = \sqrt{B_1} > 0$, $B = (B_0 - \sqrt{B_1} \cos \theta) / \sin \theta$, $B_0 \equiv \text{const}$. Здесь представляет интерес случай $B_0 = \sqrt{B_1}$, когда функция $B(\theta)$ не содержит особенности при $\theta = 0$:

$$B(\theta) = \sqrt{B_1} (1 - \cos \theta) / \sin \theta, \quad B(\theta = 0) = 0. \quad (6)$$

Если $G = -\sqrt{B_1} < 0$, $B(\theta) = (B_0 + \sqrt{B_1} \cos \theta) / \sin \theta$, то при $B_0 = -\sqrt{B_1}$ имеем

$$B(\theta) = -\sqrt{B_1} (1 - \cos \theta) / \sin \theta. \quad (7)$$

Зависимости (6) и (7) относятся к безвихревым течениям типа точечного источника ($v_r > 0$) и точечного стока ($v_r < 0$) соответственно. В обоих случаях

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2r^2} [B_1 + B^2(\theta)] > 0, \quad (8)$$

где $p_\infty \equiv \text{const}$ – давление на бесконечном удалении от источника. Далее эти два варианта решения рассматриваем при $0 \leq \theta < (\pi/2)$.

Нетрудно видеть, что системе (5) удовлетворяют функции

$$B^2(\theta) = \frac{B_3 - 2B_2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} - B_1, \quad G = \frac{B_2 - B_1 \cos \theta}{B \sin \theta}, \quad (9)$$

где B_1, B_2, B_3 – произвольные постоянные. Давление по-прежнему определяется выражением (8). Далее это решение применяем при $0 < \theta \leq (\pi/2)$. Если $B_2 = B_1$, $B_3 = 2B_1$, то (9) принимает вид (6), (7). Если $B_2 = \pm B_0 \sqrt{B_1}$, $B_3 = (B_1^2 + B_2^2) / B_1$, то (9) дает решение, соответствующее случаю $G^2 = B_1$.

В дополнение к этому результату отметим, что в [12] получено точное конически симметричное решение, позволившее рассмотреть задачу о протекании жидкости сквозь ядро сферического слоя в поле массовой силы.

Сильный разрыв течения

Будем рассматривать движение жидкости в полупространстве $r > 0$, $\theta \in [0, \pi/2]$ с вынужтой в начале координат точкой, в которой расположен гидродинамический и тепловой источник / сток. Выделяем две области.

$$n\text{-область: } 0 \leq \theta \leq \theta_j < (\pi/2), \rho = \rho_n, c_p = c_p^{(n)}. \quad (10)$$

В этой конечной окрестности луча $\theta = 0$ справедливы решения (6), (7), которые мы запишем, сменив обозначение $B_1 \rightarrow N_1$,

$$v_r = \mp \frac{\sqrt{N_1}}{r}, v_\theta = \pm \sqrt{N_1} \frac{(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta}, r > 0, \theta \in [0, \theta_j], \quad (11)$$

$$p = p_\infty - \frac{\rho_n N_1}{r^2 (1 + \cos \theta)} > 0. \quad (12)$$

Здесь и далее верхний знак относится к стоку, нижний – к источнику. Например, для стока согласно (11) при $\theta = \theta_j$ имеем $v_\theta > 0$, а для источника $v_\theta < 0$.

$$e\text{-область: } 0 < \theta_j \leq \theta \leq (\pi/2), \rho = \rho_e, c_p = c_p^{(e)}. \quad (13)$$

Эта часть полупространства примыкает к плоскости $\theta = \pi/2$, которую мы условно называем плоскостью экватора. Движение жидкости определяется решением вида (9), в записи которого делаем замену символов B, B_1, B_2, B_3 на E, E_1, E_2, E_3 :

$$v_r = \frac{E_2 - E_1 \cos \theta}{rE \sin \theta}, v_\theta = \frac{-E}{r}, N_1 > 0, r > 0, \theta \in \left[\theta_j, \frac{\pi}{2} \right], \quad (14)$$

$$p = p_\infty - \frac{\rho_e (E_1 + E^2)}{2r^2}, \quad (15)$$

$$E(\theta) = \frac{(\mp 1)}{\sin \theta} (E_3 - 2E_2 \cos \theta - E_1 \sin^2 \theta)^{1/2}. \quad (16)$$

Выражения (12) и (15) одинаковы для источника и стока. Константа p_∞ одна и та же для обеих областей; условие $p > 0$ всегда можно выполнить подходящим выбором $p_\infty > 0$.

Плоскость экватора – проницаемая граница: через нее жидкость удаляется из области течения (сток) либо поступает в область течения (источник) (рис. 1). Для стока / источника скорость отвода / притока жидкости равна

$$v_\theta \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = \pm (E_3 - E_1)^{1/2} / r, r > 0. \quad (17)$$

При решении уравнения энергии (4) температуру представляем в виде:

$$T = T_\infty + \frac{1}{r^2} \Psi(\theta), \quad (18)$$

где $T_\infty \equiv \text{const} > 0$ – температура жидкости на бесконечности. Далее применяем обозначения $\Psi_n(\theta)$, $\Psi_e(\theta)$ для функций, определяющих решение в n -, e -областях. Вычисление внутренней энергии и энтропии

$$U = \int c_p dT + \text{const}, S = \int \frac{c_p}{T} dT + \text{const} \quad (19)$$

выполняем следующим образом. При постоянной удельной теплоемкости жидкости $c_p \equiv \text{const}$ определяем внутреннюю энергию как $U = c_p T$. Для подсчета энтропии аддитивную постоянную в (19) берем такой, что нулевое значение S соответствует температуре T_∞ :

$$S = c_p \ln(T/T_\infty). \quad (20)$$

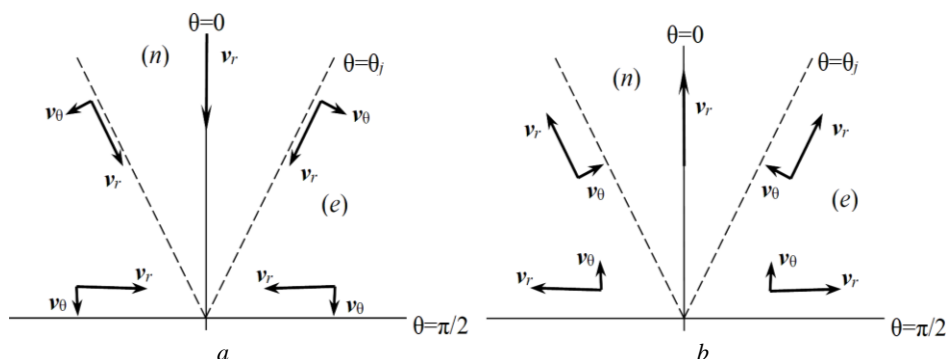


Рис. 1. Схема течения жидкости в n - и e -областях: a – сток; b – источник
 Fig. 1. Scheme of a fluid flow in n - and e -regions: (a) sink and (b) source

Коническая поверхность $\theta = \theta_j$, $r > 0$ – это неподвижный сильный разрыв, на котором условия динамической совместности имеют вид [1]:

$$\{v_r\} = 0, \quad \{\rho v_\theta\} = 0, \quad \{p + \rho v_\theta^2\} = 0, \quad (21)$$

$$\left\{ v_\theta p + \rho v_\theta \left(\frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} + U \right) \right\} = 0. \quad (22)$$

Кроме того, на разрыве должен быть выполнен закон возрастания энтропии $\{S\} > 0$. Фигурные скобки означают скачок функции при переходе через разрыв. В данном случае v_θ есть нормальная компонента вектора скорости по отношению к поверхности разрыва $\theta = \theta_j$; v_r – касательная к поверхности разрыва составляющая вектора скорости. Таким образом, первое из условий (21) – это условие непрерывности радиальной компоненты скорости, а второе и третье соотношения представляют собой условия непрерывности потоков массы и импульса при переходе через разрыв:

$$v_r^{(n)} = v_r^{(e)}, \quad \rho_n v_\theta^{(n)} = \rho_e v_\theta^{(e)}, \quad (23)$$

$$p_n + \rho_n (v_\theta^{(n)})^2 = p_e + \rho_e (v_\theta^{(e)})^2.$$

Условие (22) определяет непрерывность потока энергии на поверхности разрыва гидродинамических величин. При указании направления перехода жидкости из одной области в другую исходим из того, что при прохождении жидкости через разрыв ее энтропия возрастает. Такой сильный разрыв может служить моделью природных либо техногенных процессов, сопровождающихся резким изменением гидродинамических и тепловых параметров течения. В соотношениях (23) применяем решения (11) и (14)–(16) и получаем

$$E_1 = \rho_* N_1 e_1, \quad E_2 = \rho_* N_1 e_2, \quad E_3 = \rho_* N_1 e_3, \quad (24)$$

$$e_1 = [\rho_* (1 - \alpha) + 2\alpha] / (1 + \alpha), \quad e_2 = [1 + \alpha^2 + \rho_* \alpha (1 - \alpha)] / (1 + \alpha), \quad e_3 = 2e_1, \quad (25)$$

$$\rho_* = \rho_n / \rho_e, \quad \alpha = \cos \theta_j, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (26)$$

Безвихревое течение в конусе $\theta = \theta_j$, $r > 0$ генерирует движение в e -области. Выражения (24), (25) содержат информацию о входных параметрах N_1 , ρ_* , α . Следовательно, для источника и стока скорость и давление на проницаемой границе $\theta = \pi/2$ обусловлены воздействием сильного разрыва $\theta = \theta_j$ с априорно заданным скачком плотности. Согласно (17), (24) произвольная положительная константа N_1 характеризует скорость протекания жидкости через плоскость экватора:

$$(v_\theta)_{eq} = (\pm 1/r)(2\rho_* N_1 e_1)^{1/2}, \quad r > 0.$$

Индексом eq отмечаем значения функций при $\theta = \pi/2$. Данное решение не содержит формальных ограничений на выбор $\rho_* > 0$. Вместе с тем из физических соображений ясно, что следует брать значения ρ_* из левой и правой малых конечных окрестностей единицы. В дальнейшем при проведении оценочных расчетов принимаем $\rho_* \in [1/2, 3/2]$. Именно этот интервал встретится нам в последующем анализе задачи (см. обсуждение формулы (46)). Для краткости записи применяем неравенства $\rho_* < 1$ и $\rho_* > 1$, подразумевая при этом конечные левую и правую окрестности порогового значения $\rho_* = 1$.

Отметим еще такие формулы:

$$e_1 - e_2 = \frac{(1 - \alpha)^2 (\rho_* - 1)}{1 + \alpha}, \quad e_2^2 - e_1^2 = \frac{Y}{(1 + \alpha)^2}, \quad (27)$$

$$Y = (\rho_* - 1)(k_2 \rho_* - k_0), \quad (28)$$

$$k_0 = (1 - \alpha^2)^2, \quad k_1 = 2(\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha^4 - \alpha), \quad k_0 + k_1 + k_2 = 0, \quad k_2 < 0.$$

Существенно, что $Y = Y(\rho_*)$ – монотонно убывающая знакопеременная функция: $Y(\rho_*) > 0$ при $\rho_* < 1$; $Y(\rho_*) < 0$ при $\rho_* > 1$.

В балансе энергии (22) на разрыве учитываем (18), выделяем члены с $1/r$, $1/r^3$ и получаем два соотношения:

$$p_\infty (1 - \rho_*) = T_\infty \rho_n (c_p^{(e)} - c_p^{(n)}), \quad (29)$$

$$c_p^{(n)} \Psi_{nj} = \frac{N_1 Y}{2(1 - \alpha^2)^2} + c_p^{(e)} \Psi_{ej}, \quad (30)$$

$$\Psi_{nj} = \Psi_n(\theta_j), \quad \Psi_{ej} = \Psi_e(\theta_j).$$

Здесь и далее нижний индекс j указывает, что значение функции вычислено при $\theta = \theta_j$. Формула (29) дает связь между p_∞ и T_∞ , а (30) – это корреляция между температурами жидкости по обе стороны разрыва.

Температурное поле

Рассмотрим несколько вариантов решения тепловой задачи для гидродинамических процессов (11), (14).

I. Обсудим n - e -переход, т.е. сток, при отсутствии источников энергии, $q_v(T) \equiv 0$. В n -области течение изотермическое: $T_n = T_\infty > 0$, $\Psi_n(\theta) \equiv 0$, см. (18). Движению (14) в e -области соответствует решение

$$\Psi_e(\theta) = \Psi_1 e_1 / h_{12}(\theta), \quad (31)$$

$$h_{12}(\theta) = e_1 (1 + \cos^2 \theta) - 2e_2 \cos \theta > 0, \quad (h_{12})_j = \rho_* (1 - \alpha)^2, \quad (32)$$

в котором константа Ψ_1 определяет температуру жидкости на плоскости экватора: $\Psi_e(\theta = \pi/2) = \Psi_1$. Условие возрастания энтропии означает, что должно быть выполнено неравенство $T_{ej} > T_\infty$, т.е. $\Psi_{ej} > 0$, или, что то же самое, $\Psi_1 > 0$. Тогда в балансе энергии (30) при $\Psi_{nj} = 0$ необходимо иметь $Y(\rho_*) < 0$, т.е. $\rho_* > 1$ (см. обсуждение формулы (28)). Значит, при движении жидкости через разрыв из n -области к плоскости экватора ее плотность уменьшается, $\rho_n > \rho_e$ и, согласно (29), $c_p^{(n)} > c_p^{(e)}$.

Завихренность $\omega = (1/2) \operatorname{rot} v$ имеет вид:

$$\omega_r \equiv 0, \quad \omega_\theta \equiv 0, \quad \omega_\phi = \frac{(\rho_* N_1)^{1/2} (e_2^2 - e_1^2) \sin \theta}{2r^2 (h_{12})^{3/2}}. \quad (33)$$

Для ω_ϕ , меридианной компоненты скорости v_θ и температуры $T_e - T_\infty$ введем относительные величины, характеризующие значения названных функций на стороне разрыва, принадлежащей e -области, и на плоскости экватора:

$$\delta_\omega = \frac{(\omega_\phi)_j}{(\omega_\phi)_{eq}}, \quad \delta_v = \frac{(v_\theta)_j}{(v_\theta)_{eq}}, \quad \delta_T = \frac{(T_e - T_\infty)_j}{(T_e - T_\infty)_{eq}}.$$

В результате вычислений имеем

$$\delta_\omega = \left(\frac{e_1}{e_{12}} \right)^{3/2} \sin \theta_j, \quad \delta_v = \left(\frac{e_{12}}{e_1} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_j}, \quad \delta_T = \frac{e_1}{e_{12}}, \quad e_{12} = (h_{12})_j, \quad (34)$$

$$\delta_T = \delta_v \delta_\omega.$$

Эта простая формула демонстрирует влияние завихренности (азимутальная компонента) и скорости (меридианная компонента) на формирование теплового поля.

Если $\rho_* = 1$, то сильный разрыв отсутствует: получаем $e_1 = e_2 = 1$, $Y = 0$, $\Psi_1 = 0$, и решение (14) совпадает с (11), т.е. в области $\theta \in [0, \pi/2]$, $r > 0$ имеем безвихревой изотермический сток. При изотермическом состоянии n -области в классе решений (14), (31) не содержится термодинамически допустимый e - n -переход (источник).

II. Продолжим анализ гидродинамического стока. Пусть в n -области течение по-прежнему изотермическое, $T_n = T_\infty$, а в e -области действует источник тепловой энергии

$$q_v = q_v^1 (T - T_\infty)^2, \quad q_v^1 \equiv \text{const}. \quad (35)$$

Тогда уравнение (4) имеет точное решение вида (18):

$$\Psi_e(\theta) = 1/\chi_e(\theta),$$

$$\chi_e(\theta) = \frac{\chi_1}{e_1} h_{12} - \frac{(1 + \alpha)^2 h_{12} K_e}{(\rho_* N_1)^{1/2} Y} \left[\frac{e_1 \cos \theta - e_2}{h_{12}^{1/2}} + \frac{e_2}{e_1^{1/2}} \right], \quad (36)$$

$$K_e = q_v^1 / (\rho_e c_p^{(e)}).$$

Константа χ_1 определяет температуру жидкости на плоскости экватора, $\chi_e(\theta = \pi/2) = \chi_1 = 1/\Psi_1 \neq 0$. На разрыве $\theta = \theta_j$ получаем

$$\chi_{ej} = \frac{\rho_*}{e_1} (1-\alpha)^2 \left[\chi_1 - \frac{e_1(1+\alpha)^2 K_e}{(\rho_* N_1)^{1/2} Y} \left(\frac{e_2}{e_1^{1/2}} - \frac{1}{\rho_*^{1/2}} \right) \right]. \quad (37)$$

Расчеты показывают, что

$$\rho_* e_2^2 - e_1 = (\rho_* - 1)(a_0 + a_1 \rho_* + a_2 \rho_*^2), \quad (38)$$

$$a_0 = 2\alpha(1+\alpha), \quad a_1 = \alpha^2(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)(1+\alpha^2), \quad a_2 = \alpha^2(1-\alpha)^2.$$

Введем обозначение

$$Z + 1 = \rho_* e_2^2 / e_1$$

и на основе (38) получим, что $Z > 0$ при $\rho_* > 1$. Теперь из (30) при $\Psi_{nj} = 0$ найдем $Y = -2c_p^{(e)}(1-\alpha^2)^2 / (N_1 \chi_{ej})$, подставим это выражение в (37) и определим относительную температуру $\delta_T = \chi_1 / \chi_{ej}$:

$$\delta_T = \delta_v \delta_\omega \left(1 - \frac{Q_e}{2} Z_1 \right), \quad Z_1 = (1+Z)^{1/2} - 1, \quad (39)$$

где $Q_e = K_e \sqrt{N_1} / c_p^{(e)}$ – безразмерный параметр теплового источника. Если $q_v^1 = 0$, то (39) принимает вид (34). Условие возрастания энтропии дает следующие оценки: $\rho_n > \rho_e$, $c_p^{(n)} > c_p^{(e)}$, $Z_1 > 0$, $\chi_1 > 0$, а также $\chi_{ej} > 0$. Это неравенство выполнено при всех режимах теплоотвода $Q_e < 0$ и при не слишком большом положительном q_v^1 : $0 < Q_e < (2/Z_1)$. Поведение ρ и c_p при переходе через разрыв аналогично тому, что наблюдалось для решения (31) без источника тепловой энергии.

III. Рассмотрим гидродинамический источник (e - n -переход), полагая, что температура жидкости в e -области постоянная [$T_e = T_\infty$, $\Psi_e(\theta) \equiv 0$], а в n -области происходит отвод тепловой энергии (35), $q_v^1 < 0$. Закону возрастания энтропии удовлетворяет следующее решение:

$$T_n = T_\infty + (\Psi_n / r^2),$$

$$K_n = q_v^1 / (\rho_n c_p^{(n)}) < 0, \quad \Psi_n = -2\sqrt{N_1} / K_n > 0. \quad (40)$$

В данном случае, согласно (30), $Y > 0$, $\rho_* < 1$. При переходе через разрыв плотность жидкости уменьшается, $\rho_n < \rho_e$ и $c_p^{(n)} < c_p^{(e)}$, см. (29). Из (30) при $\Psi_{ej} = 0$ имеем $2c_p^{(n)}\Psi_n = N_1 Y / (1-\alpha^2)^2$, и с учетом (40) получаем корреляцию между скоростью втекания жидкости через плоскость экватора (параметр N_1) и теплоотводом в n -области:

$$4c_p^{(n)}(1-\alpha^2)^2 + K_n Y \sqrt{N_1} = 0.$$

Сопоставление свойств источника и стока

Изучим влияние скачка плотности и угла раскрытия конуса $\theta = \theta_j$ на свойства источника и стока. Нужно обратить внимание на то, что для n - e -перехода (сток) величина $\rho_* = \rho_n / \rho_e$ есть отношение плотности ρ_n перед разрывом к плотности жидкости ρ_e за разрывом. И наоборот: в случае e - n -перехода (источник) ρ_* есть отношение плотности жидкости за разрывом к ее плотности перед разрывом. В обоих случаях плотность при переходе через разрыв уменьшается в направлении меридианной скорости. В соответствии с этим при сопоставлении свойств стока и источника применяем производные $\partial/\partial\rho_*$ и $\partial/\partial(1/\rho_*)$.

Отношение скорости втекания либо вытекания жидкости через плоскость экватора к ее скорости вдоль луча $\theta = 0$ определяется выражением

$$V_1 = \left[\frac{v_\theta(\theta = \pi/2)}{v_r(\theta = 0)} \right]^2 = \rho_* e_1. \quad (41)$$

Отсюда получаем следующие закономерности:

– сток: $\rho_* > 1$, $V_1^{(n-e)} > 1$, $\partial V_1^{(n-e)} / \partial \alpha < 0$, $\partial V_1^{(n-e)} / \partial \rho_* > 0$;

– источник: $\rho_* < 1$, $V_1^{(e-n)} < 1$, $\partial V_1^{(e-n)} / \partial \alpha > 0$, $\partial V_1^{(e-n)} / \partial (1/\rho_*) < 0$ (рис. 2, а).

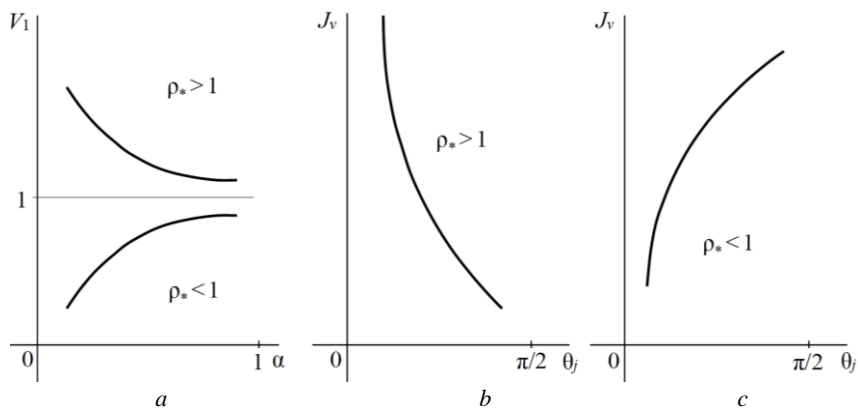


Рис. 2. Свойства меридианной компоненты скорости: а – функция (41); б, с – интеграл (42)
Fig. 2. Properties of a meridional velocity component: (а) function (41) and (b), (c) integral (42)

Интеграл

$$J_v(\theta_j, \rho_*) = \int_0^{\pi/2} (rv_\theta)^2 d\theta$$

характеризует поведение скорости v_θ во всей области течения и обладает такими свойствами:

$$J_v = J_v^{(n)} + J_v^{(e)}, \quad (42)$$

$$J_v^{(n)} = N_1 \left[\frac{2(1 - \cos\theta_j)}{\sin\theta_j} - \theta_j \right],$$

$$J_v^{(e)} = \rho_* N_1 \left[2e_1 \operatorname{ctg} \theta_j - \frac{2e_2}{\sin \theta_j} + 2e_2 + e_1 \left(\theta_j - \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$$\frac{\partial J_v}{\partial \rho_*} > 0, \operatorname{sgn} \frac{\partial J_v}{\partial \theta_j} = \operatorname{sgn}(1 - \rho_*), \operatorname{sgn} \frac{\partial^2 J_v}{\partial \theta_j^2} = \operatorname{sgn}(\rho_* - 1),$$

см. рис. 2b, c.

Изучим выражение

$$V_2 = \left[\frac{v_r(\theta = \pi/2)}{v_r(\theta = 0)} \right]^2 = \rho_* \frac{e_2^2}{e_1^2}, \quad (43)$$

которое описывает поведение радиальной скорости по обе стороны сильного разрыва. Расчеты показывают, что зависимость $V_2(\alpha)$ немонотонная, имеет в области $\alpha \in (0,1)$ один экстремум – это максимум при $\rho_* > 1$, т.е. для стока; это минимум при $\rho_* < 1$, т.е. для источника (рис. 3a, b). В точке экстремума корреляция $\rho_* \leftrightarrow \alpha$ имеет вид:

$$\rho_* = \left(2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha - 1 \right) / \left(\alpha^3 - 2\alpha + 1 \right), \quad (44)$$

причем здесь значение α слабо реагирует на изменение ρ_* в конечной окрестности единицы. Например, для источника: 1) $\rho_* = 0.7567$, $\alpha = 0.735$, $(V_2)_{\min} = 0.7436$; 2) $\rho_* = 0.8160$, $\alpha = 0.734$, $(V_2)_{\min} = 0.8053$. Для стока: 1) $\rho_* = 1.0882$, $\alpha = 0.731$, $(V_2)_{\max} = 1.0951$; 2) $\rho_* = 1.1730$, $\alpha = 0.73$, $(V_2)_{\max} = 1.1877$. Даже если в (44) формально принять $\rho_* = 2$, получим $\alpha = (\sqrt{10} - 1)/3 \cong 0,7208$. Влияние скачка плотности видно из неравенств $\partial V_2^{(n-e)} / \partial \rho_* > 0$, $\partial V_2^{(e-n)} / \partial (1/\rho_*) < 0$.

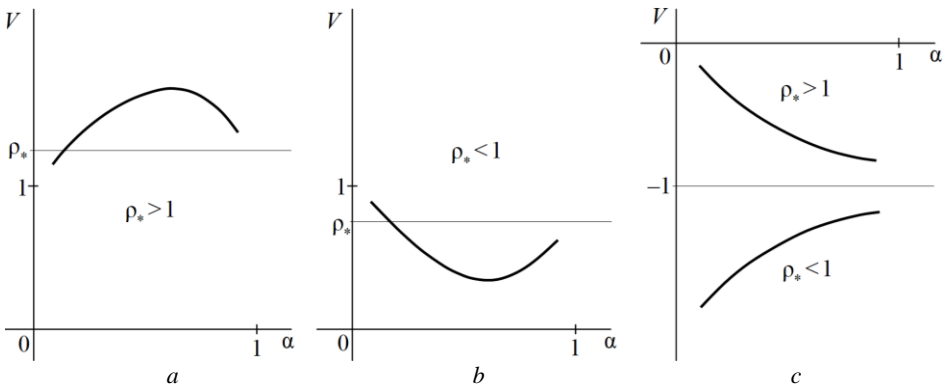


Рис. 3. Свойства радиальной компоненты скорости и ротора завихренности:

a, b – функция (43); c – функция (45)

Fig. 3. Properties of the radial velocity component and vorticity rotor:

(a), (b) function (43), and (c) function (45)

Из (33) ясно, что знаки ω_ϕ для источника и стока противоположны друг другу, см. (27), (28). Пространственная неоднородность ϕ -компоненты завихренности определяется вектором $\operatorname{rot} \omega = \Omega (\Omega_r, \Omega_\theta, \Omega_\phi \equiv 0)$. Расчеты показывают, что

$$\left(\frac{\Omega_r}{\Omega_\theta}\right)_{eq} = 3V_3, \quad V_3 = \left(\frac{v_r}{v_\theta}\right)_{eq} = -\frac{e_2}{e_1}, \quad V_3^2 = \frac{V_2}{V_1}. \quad (45)$$

Следовательно, в плоскости экватора отношение компонент вектора скорости с точностью до числового множителя равно отношению соответствующих компонент ротора завихренности. Параметр V_3 имеет следующие свойства (рис. 3, с). Сток:

$$1 + V_3^{(n-e)} > 0, \quad \partial V_3^{(n-e)} / \partial \alpha < 0, \quad \partial^2 V_3^{(n-e)} / \partial \alpha^2 > 0, \quad \partial V_3^{(n-e)} / \partial \rho_* > 0.$$

Источник:

$$1 + V_3^{(e-n)} < 0, \quad \partial V_3^{(e-n)} / \partial \alpha > 0, \quad \partial^2 V_3^{(e-n)} / \partial \alpha^2 < 0, \quad \partial V_3^{(e-n)} / \partial (1/\rho_*) < 0.$$

Для анализа поведения давления возьмем дробь

$$D = (p - p_\infty)_{eq} / (p - p_\infty)_{\theta=0}. \quad (46)$$

Здесь числитель и знаменатель отрицательные, см. (12) и (15). Условие $D \in (0,1)$ не дает физически содержательных оценок параметров задачи. Неравенство $D > 1$ записывается в виде: $\alpha(3 - 2\rho_*) > (1 - 2\rho_*)$. В частности, это будет выполнено при $\rho_* \in [1/2, 3/2]$. Таким образом, для источника и стока

$$0 < [p_{eq} / (p)_{\theta=0}] < 1.$$

Вместе с тем получаем такие закономерности:

– сток: $\partial D^{(n-e)} / \partial \alpha < 0, \quad \partial D^{(n-e)} / \partial \rho_* > 0;$

– источник: $\partial D^{(e-n)} / \partial \alpha > 0, \quad \partial D^{(e-n)} / \partial (1/\rho_*) < 0.$

Свойства меридианной компоненты градиента давления: $(\partial p / \partial \theta)_{\theta=0} = 0$; на обеих сторонах сильного разрыва $(\partial p / \partial \theta)_j < 0$. В e -области $\partial p / \partial \theta < 0$. Это значит, что для стока ($\partial \theta > 0$) имеем $\partial p < 0$ в направлении меридианной скорости; для источника ($\partial \theta < 0$) в направлении меридианной скорости $\partial p > 0$.

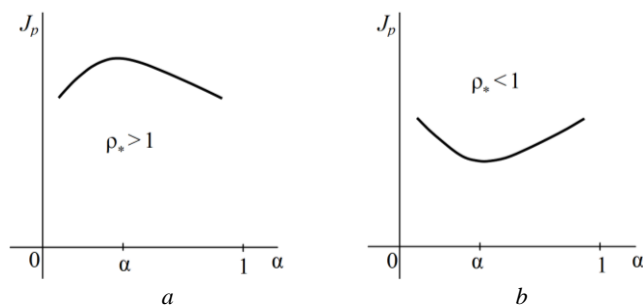


Рис. 4. Свойства давления жидкости – интеграл (47): а – сток; б – источник

Fig. 4. Properties of fluid pressure (integral (47)): (a) sink and (b) source

Интеграл

$$J_p(\alpha, \rho_*, \rho_n) = -2 \int_0^{\pi/2} r^2 (p - p_\infty) d\theta \quad (47)$$

обладает следующими свойствами:

$$J_p = 2\rho_n N_1 e_2,$$

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial J_p}{\partial \alpha} = \operatorname{sgn} [(\alpha - \alpha_m)(1 - \rho_*)], \quad \alpha_m = \sqrt{2} - 1,$$

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial^2 J_p}{\partial \alpha^2} = \operatorname{sgn}(1 - \rho_*).$$

Это значит, что зависимость J_p по отношению к аргументу α немонотонная: экстремум достигается при $\alpha = \alpha_m$ (рис. 4).

Непротекательная граница

В n -области решению (11), (12) соответствует непротекательная граница

$$r_w^{(n)} = C_1^{(n)} / (1 - x), \quad x = \cos \theta, \quad \theta \in (0, \theta_j];$$

здесь $r_w^{(n)} \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow 0$. В e -области непротекательная граница представляется выражением

$$r_w^{(e)} = C_1^{(e)} / \sqrt{e_1 x^2 - 2e_2 x + e_1}, \quad \theta \in [\theta_j, \frac{\pi}{2}],$$

в котором квадратный трехчлен под корнем положителен. Эти зависимости одинаковы для источника и стока, причем $dr_w^{(n)} / d\theta < 0$, $dr_w^{(e)} / d\theta < 0$, а обе вторые производные по θ положительные. Выбор константы $C_1^{(n)}$ определяет значение $r_w^{(n)}(\theta_j)$ на разрыве, а с помощью $C_1^{(e)}$ выполняем стыковку двух участков непротекательных границ $[r_w^{(n)}(\theta_j) = r_w^{(e)}(\theta_j)]$ и получаем

$$C_1^{(n)} = r_{wj}^{(n)}(1 - \alpha), \quad C_1^{(e)} = r_{wj}^{(e)}(1 - \alpha)\sqrt{\rho_*}.$$

Отметим, что здесь

$$r_{wj}^{(n)} / (r_{wj}^{(e)})_{eq} = \sqrt{e_1 / \rho_*} / (1 - \alpha) > 1.$$

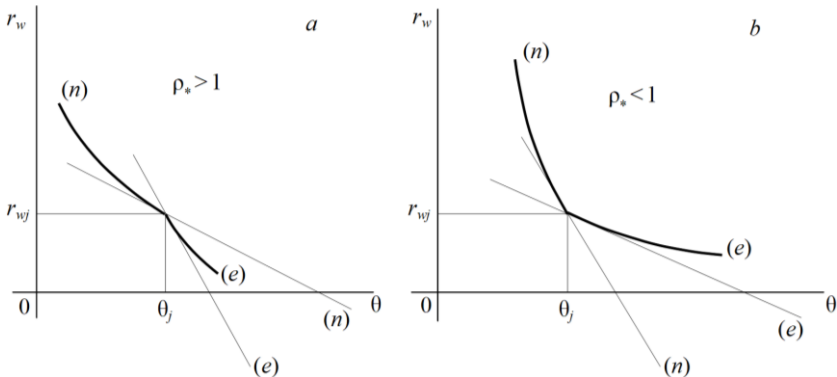


Рис. 5. Излом (48) непротекательной границы: а – сток; б – источник
 Fig. 5. Impermeable boundary with fracture (48): (a) sink and (b) source

На стыке $\theta = \theta_j$ терпит разрыв наклон $dr_w/d\theta$, а именно:

$$\left(dr_w^{(n)}/d\theta\right)_j = \rho_* \left(dr_w^{(e)}/d\theta\right)_j. \quad (48)$$

Значит, источник ($\rho_* < 1$) и сток ($\rho_* > 1$) различаются характером расположения n - и e -участков непротекаемой границы по отношению к точке излома $\theta = \theta_j$, $r_{wj} = r_w^{(n)}(\theta_j) = r_w^{(e)}(\theta_j)$ (рис. 5).

Заключение

Результаты сравнения свойств источника и стока состоят в следующем. Различия между этими течениями проявляются именно под влиянием скачка плотности при протекании жидкости через сильный разрыв, на котором выполнен закон возрастания энтропии. Существенным параметром задачи является угол раскрытия конуса $\theta = \theta_j$: безвихревое течение в конечной окрестности оси симметрии $\theta = 0$ генерирует вихревое течение в e -области, примыкающей к плоскости экватора. Формирование пространственно-неоднородного температурного поля обусловлено взаимодействием азимутальной компоненты завихренности и меридианной компоненты скорости, см. (34) и (39). Представленные на рис. 2–4 качественные свойства скорости и давления различаются для источника и стока характером поведения изученных функций: монотонное убывание и монотонное возрастание, направления выпуклости и вогнутости, наличие максимума либо минимума для немонотонных функций. Знаки ϕ -компоненты завихренности для источника и стока противоположны друг другу. В плоскости экватора корреляция между отношением компонент вектора скорости и отношением соответствующих компонент ротора завихренности описывается формулой (45). Выразительным примером является конфигурация непротекаемой границы, содержащей излом (рис. 5). Для стока острие излома направлено от оси симметрии в сторону вогнутости непротекаемой границы; для источника – к оси симметрии в сторону выпуклости границы.

Список источников

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М. : Наука, 1973. Т. 1. 536 с.
2. Головкин М.А., Головкин В.А., Калявкин В.М. Вопросы вихревой гидромеханики. М. : Физматлит, 2009. 264 с.
3. Хатунцева О.Н. Анализ причин возникновения аэродинамического гистерезиса при летных испытаниях спускаемого аппарата «Союз» на гиперзвуковом участке спуска // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 4. С. 52–62.
4. Гувернюк С.В., Максимов Ф.А. Сверхзвуковое обтекание плоской решетки цилиндрических стержней // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 6. С. 1025–1033. doi: 10.7868/S0044466916060156
5. Волков В.Ф., Тарнавский Г.А. Нарушение симметрии и гистерезис стационарных и квазистационарных решений уравнений Эйлера и Навье–Стокса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41, № 11. С. 1742–1750.
6. Shtern V., Hussain F. Collapse, symmetry breaking, and hysteresis in swirling flows // Annual Review of Fluid Mechanics. 1999. V. 31. P. 537–566. doi: 10.1017/S0022112090001082
7. Ogus G., Baelmans M., Vanierschot M. On the flow structures and hysteresis of laminar swirling jets // Physics of Fluids. 2016. V. 28. P. 123604-1–123604-16. doi: 10.1063/1.4972227

8. Богомолов В.А. Движение идеальной жидкости постоянной плотности при наличии стоков // Механика жидкости и газа. 1976. № 4. С. 21–27.
9. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск : Наука, 1989. 336 с.
10. Пухначев В.В. Задача о точечном источнике // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 2. С. 19–31. doi: 10.15372/PMTF20190202
11. Бардос К., Тити Э.С. Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости // Успехи математических наук. 2007. Т. 62, вып. 3. С. 5–46. doi: 10.4213/gm6811
12. Шабловский О.Н. Сферическое течение идеальной жидкости в пространственно-неоднородном силовом поле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 64. С. 146–155. doi: 10.17223/19988621/64/11

References

1. Sedov L.I. (1973) *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. Volume 1. Moscow: Nauka.
2. Golovkin M.A., Golovkin V.A., Kalyavkin V.M. (2009) *Voprosy vikhrevoy gidromekhaniki* [Issues of vortex hydromechanics]. Moscow: Fizmatlit.
3. Khatuntseva O.N. (2011) Analysis of the reasons for an aerodynamic hysteresis in flight tests of the Soyuz reentry capsule at the hypersonic segment of its descent. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52. pp. 544–552. doi: 10.1134/S0021894411040067
4. Guvernuyk S.V., Maksimov F.A. (2016) Supersonic flow past a flat lattice of cylindrical rods. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 56. pp. 1012–1019. doi: 10.1134/S0965542516060154
5. Volkov V.F., Tarnavskiy G.A. (2001) Narushenie simmetrii i gisterezis statsionarnykh i kvazistatsionarnykh reshe-niy uravneniy Eylera i Nav'e-Stoksa [Symmetry breaking and hysteresis of stationary and quasi-stationary solutions of the Euler and Navier-Stokes equations]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 41(11). pp. 1742–1750.
6. Shtern V., Hussain F. (1999) Collapse, symmetry breaking, and hysteresis in swirling flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 31. pp. 537–566. doi: 10.1017/S0022112090001082
7. Ogus G., Baelmans M., Vanierschot M. (2016) On the flow structures and hysteresis of laminar swirling jets. *Physics of Fluids*. 28. Article 123604. pp. 1–16. doi: 10.1063/1.4972227
8. Bogomolov B.A. (1976) Dvizhenie ideal'noy zhidkosti postoyannoy plotnosti pri nalichii stokov [Motion of an ideal fluid of constant density in the presence of sinks]. *Mekhanika zhidkosti i gaza – Fluid Dynamics*. 4. pp. 21–27.
9. Goldshtik M.A., Shtern V.N., Yavorskiy N.I. (1989) *Vyazkie techeniya s paradoksal'nymi svoystvami* [Viscous flows with paradoxical properties]. Novosibirsk: Nauka.
10. Pukhnachev V.V. (2019) Problem of a point source. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 60. pp. 200–210. doi: 10.1134/S0021894419020020
11. Bardos C., Titi E.S. (2007) Euler equations for incompressible ideal fluids. *Russian Mathematical Surveys*. 62(3). pp. 409–451. doi: 10.1070/RM2007v062n03ABEH004410
12. Shablovskiy O.N. (2020) Sfericheskoe techenie ideal'noy zhidkosti v prostanstvenno-neodnorodnom silovom pole [Spherical flow of an ideal fluid in a spatially inhomogeneous force field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and mechanics*. 64. pp. 146–155. doi: 10.17223/19988621/64/11

Сведения об авторе:

Шабловский Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика» Гомельского государственного технического университета имени П.О. Сухого, Гомель, Республика Беларусь. E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

Information about the author:

Shablovskiy Oleg N. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 05.05.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 05.05.2023; accepted for publication 10.04.2024