Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Р. ВИНОГРАД

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРИВОЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 III 1949)

I. Пусть динамическая система, заполняющая плоскость, задана уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

с непрерывными правыми частями и содержит неограниченную и неуходящую при $t > 0$ кривую L. Поставим вопрос о топологической структуре $E_\omega(L)$ — ω-предельного множества кривой L. Случай ограниченной кривой исследован Бендиксоном ([1]) и Ю. К. Солнцевым ([2]). Если не накладывать никаких добавочных ограничений, то имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Чтобы плоское множество E могло служить ω-предельным для траектории динамической системы, заданной уравнениями с непрерывными во всей плоскости правыми частями, необходимо и достаточно, чтобы оно было границей односвязной области.*

Доказательства дальнейших теорем основаны на некоторых топологических леммах, из которых важнейшая лемма 1.

Лемма 1. *Пусть на плоскости континуум F состоит из континуумов T_1 и T_2 и простых дуг γ_1, γ_2 и γ_3, где $T_1 \cap T_2 = 0$, $\gamma_i \cap \gamma_j = 0$ и у каждой γ концевые точки и только они лежат в разных T. Тогда любая из дополнительных к F областей имеет на границе внутренние точки не более чем двух дуг γ.*

Теорема 2. *Если динамическая система заполняет локально-компактное метрическое пространство со счетной базой и L — некомпактная при $t > 0$ траектория, то $E_\omega(L)$ не имеет компактных компонент.*

Для евклидовых пространств теорема 2 означает, что предельное множество неограниченной траектории не имеет ограниченных компонент.

II. Примем следующие обозначения и термины: ω-предельное множество для L — E_ω; α- или ω-предельное множество любой другой кривой K — $E_\alpha(K)$, соответственно $E_\omega(K)$; множество особых точек из E_ω — E_s; компоненты связности E_ω, компоненты связности E_s, интегральные кривые из E_ω — соответственно B, C и K с индексами; компоненты C назовем особыми компонентами. Если K — кривая, Φ — некоторое множество и $E_\alpha(K) \subseteq \Phi$ или $E_\omega(K) \subseteq \Phi$, то скажем, что K примыкает к Φ при $t < 0$ $(t > 0)$ и запишем: $\Phi < K$, соответственно $K < \Phi$. Случай $\Phi < K < \Phi$, вообще говоря, не исключен.

Перечислим основные свойства E_ω.

1) E_ω и E_s суть нигде не плотные замкнутые множества. Ю. К. Солнцев показал ([2]), что: 2) E_ω содержит не более счетного числа кривых K_i; 3) L приближается к K_i спиралевидно; 4) каждая K_i имеет окрестность, свободную от иных точек E_ω. Отсюда и из теорем Бендиксона следует: 5) $E_\alpha(K_i)$ и $E_\omega(K_i)$ состоят из особых точек и 6) пределы для последовательностей точек из разных K_i состоят из особых точек (если не пусты). По теореме 1 никакая K_i не есть цикл, что по первой теореме Бендиксона означает также, что K_i неустойчива по Пуассону, откуда легко вывести: 7) любая K_i гомеоморфна прямой, в частности, локально-связна.

Определение 1. Плоское множество Φ назовем φ-образом прямой $-\infty < \tau < \infty$ (или сегмента $a \leqslant \tau \leqslant b$), если каждому τ отвечает связное подмножество Φ, причем из условия $\lim \tau_n = \tau_0$ следует $\mathrm{lt}\,\varphi(\tau_n) \subseteq \varphi(\tau_0)$, а при $\tau_n \to \pm\infty$ имеем $\overline{\mathrm{lt}}\,\varphi(\tau_n) = 0$.

Теорема 3. *Пусть E_ω содержит ограниченную особую компоненту C_0. Тогда существует континуум Φ, $C_0 \subseteq \Phi \subset E_\omega$, и односвязная ограниченная область $G \supset \Phi$ с жордановой границей Γ такие, что:*

1) Γ *пересекают ровно две кривые из E_ω, K_0 и K_0^*, каждая в одной точке.*

2) *В смысле движения по t кривая K_0 „входит“ в G, а K_0^* „выходит“ из G и $K_0 < \Phi < K_0^*$.*

3) $\overline{G} \cap (E_\omega \setminus K_0 \setminus K_0^*) = \Phi$.

4) Φ *является φ-образом сегмента $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, причем:*

а) $\varphi(\tau)$ *есть либо обыкновенная точка, либо особая компонента;*

б) *точки сегмента, отображающиеся в особые компоненты, образуют нигде не плотное замкнутое множество;*

в) *на множестве, отображающемся в обыкновенные точки, $\varphi(\tau)$ есть гомеоморфизм;*

г) *если U_1 и U_2 суть непересекающиеся окрестности $\varphi(\tau_1)$ и $\varphi(\tau_2)$, то, начиная с некоторого $t > T$, кривая L посещает U_1 и U_2 поочередно в циклическом порядке.*

III. Наложим теперь на E_ω ограничение: E_ω не содержит неограниченных особых компонент. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) E_ω содержит не более счетного числа компонент B_j.

2) Каждая B_j открыта относительно E_ω.

3) Каков бы ни был компакт $V \subset B_j$, существует континуум $\chi \subset B_j$, содержащий V.

4) Окрестность G из теоремы 3 можно построить для любого континуума $\chi \subset B_j$.

5) Кривая $K \subset E_\omega$, неограниченная при $t < 0$ $(t > 0)$, уходит при $t < 0$ $(t > 0)$.

6) Все $K_i \subset E_\omega$ упорядочены по типу некоторой системы интервалов окружности в смысле посещаемости кривою L ([2]). Кривые, лежащие в одной B_j, удается упорядочить в том же смысле по типу системы интервалов прямой. Будем писать $K_n < K_m$, если K_n предшествует K_m.

Определение 2. Кривую $K \subset B_j$ назовем кривой 1-го рода, если $B_j \setminus K$ несвязно. Кривые K' и K'' назовем парой 2-го рода, если $B_j \setminus K'$ и $B_j \setminus K''$ связны, но $B_j \setminus K' \setminus K''$ несвязно.

7) Доказывается, что в условиях определения 2 $B_j \setminus K$ состоит из двух неограниченных компонент, $B_j \setminus K' \setminus K''$ — из одной неограниченной компоненты и одного континуума, а кривые K, K' и K'' ограничены в обе стороны.

С помощью этих замечаний удается охарактеризовать все типы компонент B_j, встречающиеся в E_ω.

а) B содержит неограниченную в обе стороны кривую K. Из 4, II и 5, III вытекает: $B \equiv K$.

б) B содержит две кривых, K и K^*, неограниченных каждая в одну сторону. Тогда в обратные стороны K и K^* примыкают к особым компонентам C и C^* (5, II). По 3 и 4, III строим континуум $\chi \supset C \cup C^*$ и область $G(\chi)$. Так как K и K^* вне G уходят, то $B = K \cup K^* \cup \cup [G \cap (B \setminus K \setminus K^*)]$. По теореме 3 последний член есть континуум Φ. а K и K^* уходят — одна при $t < 0$, другая при $t > 0$. Таким образом, $B = K \cup \Phi \cup K^*$, причем $K < \Phi < K^*$. Если отрезок $[0, 1]$ φ-отобразить на Φ, а интервалы $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$ соответственно на K и K^* (гомеоморфно), то получим: B есть φ-образ прямой с соблюдением п. 4 теоремы 3. Мы видим также, что более двух неограниченных кривых B содержать не может.

в) B содержит одну неограниченную, например, при $t < 0$, кривую K_0. Тогда найдутся кривые 1-го рода K_n и континуумы Φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ такие, что $B = K_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Phi_n \cup K_n)$ и $K_0 < \Phi_1 < K_1 < \Phi_2 < K_2 < \ldots$ Существуют непересекающиеся окрестности $G_n(\Phi_n)$ из теоремы 3, причем K_n „выходит“ из G_n и „входит“ в G_{n+1}. B является φ-образом прямой, на которой интервалы $(-\infty, 0)$ и $(2n-1, 2n)$ отображаются соответственно на K_0 и K_n, а отрезки $[2n-2, 2n-1]$ — на Φ_n с выполнением п. 4 теоремы 3. В любую конечную часть плоскости попадает лишь конечное число K_n и Φ_n.

г) B не содержит неограниченных кривых, но содержит кривую 1-го рода K_0. Строение B весьма сходно с типом в), лишь вместо неограниченной кривой влево тянется цепочка из K_{-n} и Φ_{-n}, аналогичная цепочке из K_n и Φ_n, и их прообразы заполняют левую полуось прямой τ.

д) B не содержит ни неограниченных, ни 1-го рода кривых. Тогда можно указать континуум Φ_0, пары континуумов (Φ_{-n}, Φ_n) и пары кривых 2-го рода (K_{-n}, K_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ такие, что $B = \Phi_0 \cup \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\Phi_n \cup K_n)$ и что $\ldots < \Phi_{-1} < K_{-1} < \Phi_0 < K_1 < \Phi_1 < \ldots$. При этом $\Phi_j \cap \Phi_i = 0$ при $|i| \neq |j|$, но всегда $\Phi_{-n} \cap \Phi_n \neq 0$ и состоит из особых точек. Если обозначить $\Phi_{-n} \cup \Phi_n = \Psi_n$ для $n \geqslant 1$ и $\Phi_0 = \Psi_0$, то $\Psi_0, \Psi_1, \ldots$ можно заключить в непересекающиеся области $H_n(\Psi_n)$, причем K_n „выходит“ из H_{n-1} и „входит“ в H_n, а K_{-1} наоборот. B является φ-образом прямой, на которой прообразы $K_{\pm n}$ и $\Phi_{\pm n}$ расположены как в случае г).

Можно доказать, что компоненты типов а) — г) так разбивают плоскость, что в дополнении имеются ровно две неограниченных области, компоненты же типа д) имеют в дополнении одну неограниченную область.

Итак, имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *При отсутствии неограниченных особых компонент E_ω состоит не более чем из счетного числа компонент $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots$ Со всякой ограниченной частью плоскости пере-*

секается не более конечного числа различных B_j. *Каждая* B_j *неограничена, является* φ*-образом прямой с соблюдением условий п.* 4 *теоремы* 3 *и принадлежит к одному из перечисленных выше пяти типов* а) — д).

Институт математики
Московского государственного
университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Bendixson, Acta Math., 24 (1901). [2] Ю. К. Солнцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 9, № 3 (1945).