

С. Е. БИРМАН

**К ЗАДАЧЕ О КРУЧЕНИИ ТРУБЧАТОГО СТЕРЖНЯ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ**

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 9 II 1949)

В статье <sup>(1)</sup> мы рассмотрели задачу о кручении трубчатого стержня квадратного сечения усилиями, действующими вдоль ребер стержня в соответствии со схемой *a* (рис. 1)\*.

Решение аналогичной задачи — о кручении стержня усилиями, действующими вдоль двух ребер стержня в соответствии со схемой *b* (рис. 1) — мы можем получить путем наложения решений для схем *b* (рис. 2) и *a*.

Таким образом, имеем следующую задачу (рис. 2): две грани стержня (вертикальные) симметрично нагружены растягивающими напряжениями  $f(x)$ , две другие — сжимающими напряжениями  $f(x)$ .

Разрезав стержень вдоль ребер на отдельные полосы, нагружаем вертикальные полосы симметрично приложенными, растягивающими напряжениями  $f(x)$  и касательными напряжениями  $\gamma(x)$ ; горизонтальные грани — напряжениями  $f(x)$  и  $\gamma(x)$  обратного знака.

В силу неразрывности в рассматриваемом случае деформация кромок граней вдоль ребер  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

Применяя решение для бесконечной полосы\*\*, мы можем это условие выразить следующим интеграль-

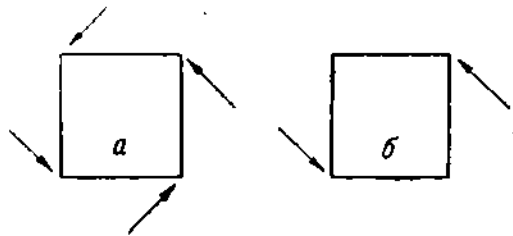


Рис. 1

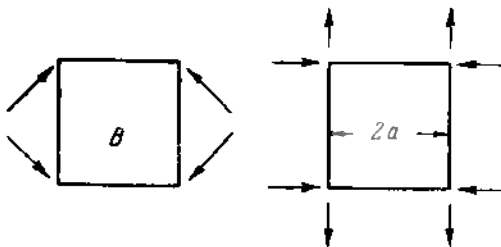


Рис. 2

ным уравнением:

\* В статье <sup>(1)</sup> имеется опечатка: на стр. 306, 4-я строка снизу, в выражении для  $X_x$  перед последним членом в квадратных скобках должен быть знак + (вместо знака —).

\*\* См. нашу работу <sup>(2)</sup>, обозначения сохраняем те же.

$$2k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}^2 a\xi d\xi}{\operatorname{sh} 2a\xi + 2a\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t) \sin \xi(t-x) dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[(k-1) \operatorname{sh} 2a\xi - 2a\xi] d\xi}{\operatorname{sh} 2a\xi + 2a\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \xi(t-x) dt = 0,$$

откуда

$$\gamma(x) = \frac{1}{2k\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ (k-1) \operatorname{th} a\xi - \frac{a\xi}{\operatorname{ch}^2 a\xi} \right] d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \xi(t-x) dt.$$

Затем, в соответствии с нагружением, получим

$$\Phi(z) = \pm \frac{1}{2k\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\operatorname{ch} a\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \xi(t-z) dt,$$

$$\Psi'(z) = \pm \frac{1}{2ak\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[(k-1) \operatorname{ch} a\xi + a\xi \operatorname{sh} a\xi] d\xi}{\operatorname{ch}^2 a\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \xi(t-z) dt *.$$

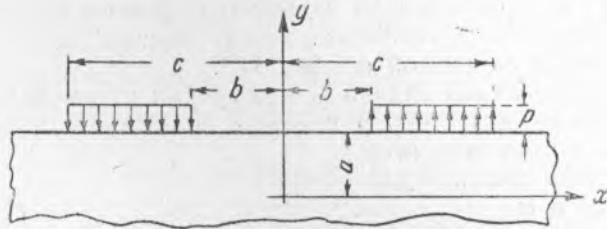


Рис. 3

Рассмотрим пример. Пусть  $f(x)$  представляет нагрузку, изображенную на рис. 3\*\*. Тогда

$$\Phi(z) = \pm \frac{2p}{k\pi} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{ch} mc}{\operatorname{sh} mz} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} mz} \right],$$

$$\Psi'(z) = \pm \frac{2(k-1)p}{ak\pi} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{ch} mc}{\operatorname{sh} mz} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} mz} \right] \pm$$

$$\pm \frac{mp}{ak\pi} \left[ \frac{c-z}{\operatorname{ch} m(c-z)} - \frac{c+z}{\operatorname{ch} m(c+z)} - \frac{b-z}{\operatorname{ch} m(b-z)} + \frac{b+z}{\operatorname{ch} m(b+z)} \right],$$

и компоненты напряжения будут:

$$Y_y = \pm \frac{p}{\pi} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sh} m(c-x)}{\cos my} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sh} m(c+x)}{\cos my} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sh} m(b-x)}{\cos my} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sh} m(b+x)}{\cos my} \right] \pm$$

$$\pm \frac{p \cos my}{ak} \left[ \frac{(c-x) \operatorname{ch} m(c-x)}{\operatorname{ch} 2m(c-x) + \cos 2my} - \frac{(c+x) \operatorname{ch} m(c+x)}{\operatorname{ch} 2m(c+x) + \cos 2my} - \right.$$

$$\left. - \frac{(b-x) \operatorname{ch} m(b-x)}{\operatorname{ch} 2m(b-x) + \cos 2my} + \frac{(b+x) \operatorname{ch} m(b+x)}{\operatorname{ch} 2m(b+x) + \cos 2my} \right],$$

\* Знаки соответственно для вертикальных и горизонтальных граней.

\*\* Этот пример аналогичен рассмотренному ранее (1), и путем их наложения получим пример решения по схеме б.

$$\begin{aligned}
X_x = & \pm \frac{\rho(2-k)}{k\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} m(c-x)}{\cos my} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} m(c+x)}{\cos my} - \right. \\
& \left. - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} m(b-x)}{\cos my} + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} m(b+x)}{\cos my} \right] \mp \\
& \mp \frac{\rho \cos my}{ak} \left[ \frac{(c-x) \operatorname{ch} m(c-x)}{\operatorname{ch} 2m(c-x) + \cos 2my} - \frac{(c+x) \operatorname{ch} m(c+x)}{\operatorname{ch} 2m(c+x) + \cos 2my} - \right. \\
& \left. - \frac{(b-x) \operatorname{ch} m(b-x)}{\operatorname{ch} 2m(b-x) + \cos 2my} + \frac{(b+x) \operatorname{ch} m(b+x)}{\operatorname{ch} 2m(b+x) + \cos 2my} \right], \\
X_y = & \pm \frac{\rho(k-1)}{2k\pi} \left[ \ln \frac{[\operatorname{ch} m(c-x) - \sin my][\operatorname{ch} m(c+x) - \sin my]}{[\operatorname{ch} m(c-x) + \sin my][\operatorname{ch} m(c+x) + \sin my]} - \right. \\
& \left. - \ln \frac{[\operatorname{ch} m(b-x) - \sin my][\operatorname{ch} m(b+x) - \sin my]}{[\operatorname{ch} m(b-x) + \sin my][\operatorname{ch} m(b+x) + \sin my]} \right] \pm \\
& \pm \frac{\rho \sin my}{ak} \left[ \frac{(c-x) \operatorname{sh} m(c-x)}{\operatorname{ch} 2m(c-x) + \cos 2my} + \frac{(c+x) \operatorname{sh} m(c+x)}{\operatorname{ch} m(c+x) + \cos 2my} - \right. \\
& \left. - \frac{(b-x) \operatorname{sh} m(b-x)}{\operatorname{ch} 2m(b-x) + \cos 2my} - \frac{(b+x) \operatorname{sh} m(b+x)}{\operatorname{ch} 2m(b+x) + \cos 2my} \right],
\end{aligned}$$

где  $m = \pi / 2a$ .

Поступило  
9 II 1949

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1 С. Е. Бирман, ДАН, 62, № 3 (1948).    2 С. Е. Бирман, ДАН, 62, № 2 (1948).