Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 4

МЕХАНИКА

В. В. КРЕЧМЕР

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 9 II 1949)

Пусть $\mathbf{u}_г$, $\mathbf{u}_м$ — векторы упругих смещений в сходственных точках $(x_г, y_г, z_г)$, $(x_м, y_м, z_м)$ главного тела ($Г$) и модели ($М$). Предполагается, что $Г$ и $М$ суть однородные и изотропные упругие тела, что они геометрически подобны и сделаны из одинакового материала. Обозначим G — модуль сдвига и ν — коэффициент Пуассона, одинаковые для $Г$ и $М$; $\lambda = \mathrm{const}$ — отношение линейных размеров $Г$ и $М$ (масштаб длины). Если к $Г$ и $М$ приложены только поверхностные силы и, по условию задачи, объемные силы отсутствуют, и если силы, приложенные к $Г$ и $М$, таковы, что в сходственных точках:

$$x_г = \lambda x_м, \quad y_г = \lambda y_м, \quad z_г = \lambda z_м \tag{1}$$

выполняется условие:

$$\mathbf{u}_г = \lambda \mathbf{u}_м, \tag{2}$$

то уравнение упругого равновесия $Г$:

$$G\left(\nabla^2 \mathbf{u}_г + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_г\right) = 0 \tag{3}$$

непосредственно переходит в уравнение упругого равновесия $М$:

$$G\left(\nabla^2 \mathbf{u}_м + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_м\right) = 0, \tag{4}$$

так как, вследствие (1) и (2): $\mathrm{div}\,\mathbf{u}_г = \mathrm{div}\,\mathbf{u}_м$, $\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_г = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_м$, $\nabla^2 \mathbf{u}_г = \frac{1}{\lambda}\nabla^2 \mathbf{u}_м$. Аналогичные выводы получаются и для граничных условий. В этом случае тензоры напряжений и тензоры деформаций в сходственных точках $Г$ и $М$ эквиваленты. Этими выводами можно воспользоваться и в случае, когда условия статического подобия выражены в форме скалярных соотношений между величинами, отнесенными к разным системам координат.

Рассмотрим задачи, содержащие условие, что к $Г$ и $М$ приложены объемные силы. В частности, мы вначале рассмотрим часто встречающийся в технических приложениях случай, когда напряженное состояние $Г$ и $М$ вызывается силами тяжести, приложенными к $Г$ и $М$ в качестве объемных сил. В этом случае уравнения упругого равновесия $Г$ и $М$ суть:

$$G\left(\nabla^2 \mathbf{u}_г + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_г\right) + \rho \mathbf{g} = 0, \tag{5}$$

$$G\left(\nabla^2 \mathbf{u}_м + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_м\right) + \rho \mathbf{g} = 0, \tag{6}$$

где $\mathbf{g}$ — вектор силы тяжести, отнесенной к единице массы; ρ — масса, отнесенная к единице объема. Следовательно, если напряженное состояние Γ и M вызывается силами тяжести, то при $\lambda \neq 1$ в сходственных точках, определяемых соотношениями (1), условие (2) не выполняется; в этом случае тензоры напряжений и тензоры деформаций в сходственных точках Γ и M не эквивалентны.

Можно, однако, применить способ [1,2], позволяющий в рассматриваемом случае осуществить приближенным образом статическое подобие между Γ и M. Способ основан на искусственном введении сил инерции, в частности, — что является наиболее удобным, — центробежных сил инерции. Эксперименты по способу центробежной установки выполняются так, чтобы для M основное расчетное значение имели центробежные силы инерции, действующие на M в качестве объемных сил. Размеры модели назначаются достаточно малыми по сравнению с ее расстоянием от оси вращения; тогда при выполнении экспериментов, имеющих прикладное значение, приближенным образом предполагается, что для всех точек M центробежная сила инерции имеет одинаковое по величине и направлению ускорение. Предполагается, что при достаточно большом λ можно влиянием силы тяжести, приложенной к M, пренебречь, и угловая скорость $\vec{\omega} \parallel \mathbf{g}$ машины в период ее установившегося движения назначается так, чтобы

$$\omega^2 R/g = \lambda, \tag{7}$$

где R — среднее расстояние M от оси вращения, g — ускорение силы тяжести. Тогда, при соответственном расположении M, уравнение упругого равновесия в системе отсчета, неизменно связанной с M, есть:

$$G\left(\nabla^2 \mathbf{u}_M + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_M\right) + \rho\mathbf{q} = 0, \tag{8}$$

где $\mathbf{q}$ — вектор центробежной силы инерции, отнесенной к единице массы. Условия статического подобия выражаются в форме приближенных скалярных соотношений между величинами, отнесенными к разным системам координат.

В некоторых научно-исследовательских лабораториях СССР выполнены экспериментальные работы при помощи центробежной установки. Первые такие опыты были произведены Г. И. Покровским в 1932 г. Следует заметить, что центробежная установка часто применялась для экспериментального изучения задач, в которых должны быть соблюдены не только условия статического подобия, но и условия динамического подобия; при этом выяснение условий динамического подобия производилось при помощи различных приближенных допущений. Вопрос о том, в какой мере при моделировании посредством центробежной установки могут быть соблюдены условия динамического подобия, должен явиться предметом отдельных исследований. Очевидно, что при моделировании посредством центробежной установки следует во всех случаях считать исключенной возможность осуществления динамического подобия в обычном смысле этого понятия, так как мы рассматриваем случай, когда движения Γ и M отнесены к разным системам координат таким, для которых переход от одной системы к другой не может быть произведен посредством галилеева преобразования. Мы допускаем, что при экспериментальном изучении некоторых задач прикладного характера можно ввести понятие об относительном динамическом подобии, когда векторные соотношения не удовлетворяются, а удовлетворяются соответственные скалярные соотношения между величинами, отнесенными к разным системам координат. Однако, по указанной причине, такая форма динамического подобия также не может быть осуществлена при моделировании посредством центробежной установки. Для последующих выводов воспользуемся примером.

Пусть материальная точка $\varGamma$ совершает свободное падение вблизи поверхности земли, начиная с момента $t_г=0$; материальная точка M в начальный момент $t_м=0$, совпадающий с начальным моментом $t_г$, освобождена от связей в каретке, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг неподвижной вертикальной оси центробежной установки. Мы назначаем масштаб длины λ достаточно большим и, в соответствии с обычно применяемыми способами экспериментального изучения задач прикладного характера посредством центробежной установки, с учетом размеров кареток, полагаем, что влиянием силы тяжести, приложенной к M, можно пренебречь. Тогда дифференциальные уравнения движения $M(x_м, y_м)$ по отношению к расположенной в горизонтальной плоскости системе прямоугольных координат $O_мX_мY_м$, неизменно связанной с кареткой, при условии $\vec{\omega}=\mathrm{const}$, суть:

$$\frac{d^2x_м}{dt_м^2}=\omega^2(x_м+R)+2\omega\frac{dy_м}{dt_м},$$
$$\frac{d^2y_м}{dt_м^2}=\omega^2y_м-2\omega\frac{dx_м}{dt_м},\tag{9}$$

где $R=\mathrm{const}$ — расстояние от начала системы $O_мX_мY_м$ до оси вращения. При начальных условиях: $t_г=0$, $x_г=0$, $dx_г/dt_г=0$; $t_м=0$, $x_м=y_м=0$, $dx_м/dt_м=dy_м/dt_м=0$, радиусы-векторы $\varGamma$ и M суть:

$$\mathbf{r}_г=\mathbf{i}_г\frac{gt_г^2}{2},\tag{10}$$

$$\mathbf{r}_м=R\left[\mathbf{i}_м(\cos\omega t_м+\omega t_м\sin\omega t_м-1)-\mathbf{j}_м(\sin\omega t_м-\omega t_м\cos\omega t_м)\right].\tag{11}$$

Траектория $\varGamma$ есть прямая линия; траектория, определяемая выражением (11), есть спираль, радиус кривизны которой изменяется по закону:

$$\Upsilon_м=R\omega t_м.\tag{12}$$

При указанных условиях силы, приложенные к $\varGamma$ и M, суть:

$$\mathbf{P}_г=\mathbf{i}_гm_гg,\tag{13}$$

$$\mathbf{P}_м=m_м\omega^2R\left[\mathbf{i}_м(\cos\omega t_м-\omega t_м\sin\omega t_м)-\mathbf{j}_м(\sin\omega t_м+\omega t_м\cos\omega t_м)\right],\tag{14}$$

где $m_г$, $m_м$ — массы $\varGamma$ и M. Таким образом, как следовало ожидать заранее, если мы в этой задаче ограничимся рассмотрением только кинематических и динамических элементов, то у нас не будет данных для установления какой-либо из указанных форм подобия.

Мы воспользуемся изложенным примером для выяснения целесообразности применения в определенных случаях критерия частичного относительного подобия, основанного на привлечении к рассмотрению, наряду с кинематическими и динамическими элементами, также элементов, определяемых силами упругости, которые возникнут, если изучаемое движение в определенный момент времени обусловит ударную нагрузку на упругое тело.

Заметим, что сила $\mathbf{P}_г$ определяется потенциальным вектором; вектор $\mathbf{P}_м$, определяющий равнодействующую приложенных к M центробежной силы инерции и силы инерции Кориолиса, не является потенциальным. Имея в виду экспериментальное изучение некоторых задач прикладного характера, мы произведем расчеты динамических напряжений, пользуясь формулами теории сопротивления материалов, при следующих предположениях: 1) в подвергнутом удару теле возникают только упругие деформации; 2) возникшие вследствие удара деформации распространяются по телу мгновенно; 3) в рассматриваемой задаче ударную нагрузку M осуществляет только касательная компонента силы $\mathbf{P}_м$; 4) тела $Г$ и M расположены так, что основное расчетное значение имеют нормальные динамические напряжения ($\sigma_г^\vartheta$, $\sigma_м^\vartheta$). Обозначим $F_г$, $F_м$—площади поперечных сечений, $l_г$, $l_м$ — продольные размеры, $v_г$, $v_м$ — величины скоростей, E — одинаковый для $Г$ и M модуль упругости на динамическое растяжение и сжатие (предполагается, что тела, принимающие нагрузку, геометрически подобны и сделаны из одинакового материала). Имеем:

$$\max \sigma_г^\vartheta = \sqrt{\frac{EP_г v_г^2}{F_г l_г g}}. \tag{15}$$

При указанных условиях мы можем на основании рассмотрения выражений: $W_г^{(0,t_г)} = \int\limits_{(L_г)} \mathbf{P}_г d\mathbf{r}_г$, $W_м^{(0,t_м)} = \int\limits_{(L_м)} \mathbf{P}_м d\mathbf{r}_м$, определяющих работы сил $\mathbf{P}_г$, $\mathbf{P}_м$ за промежутки времени $(0, t_г)$, $(0, t_м)$, предположить наличие формулы:

$$\max \sigma_м^\vartheta = \sqrt{\frac{EP_м^{кс} v_м^2}{F_м l_м \omega^2 R}}, \tag{16}$$

где $P_м^{кс}$ —величина касательной компоненты силы $\mathbf{P}_м$.

Потребуем теперь, чтобы промежутки времени $(0, t_г)$, $(0, t_м)$ были назначены, исходя из условия:

$$\max \sigma_г^\vartheta = \max \sigma_м^\vartheta. \tag{17}$$

Замечая, что $P_г = m_г g$, $P_м^{кс} = m_м \omega^2 R$, $v_г = g t_г$, $v_м = \omega^2 R t_м$, $m_г/m_м = \mu$ (масштаб массы), $l_г/l_м = \lambda$, $F_г/F_м = \lambda^2$, $t_г/t_м = \tau$ (масштаб времени), и предположив, как обычно, что угловая скорость центробежной машины в период ее установившегося движения назначена в соответствии с условием (7), находим на основании (15), (16) и (17):

$$\mu\tau^2/\lambda^5 = 1. \tag{18}$$

Если ударяющие грузы геометрически подобны (при том же масштабе длины λ) и сделаны из одинакового материала, то:

$$\mu = \lambda^3; \tag{19}$$

подставляя это значение в (18), получим:

$$\tau = \lambda. \tag{20}$$

Тогда

$$v_г/v_м = 1, \qquad P_г/P_м^{кс} = \lambda^2. \tag{21}$$

Наличие формулы (20), определяющей масштаб времени, свидетельствует о возможности осуществления указанной формы подобия при моделировании посредством центробежной установки. Выражения (21) аналогичны соотношениям, вытекающим из критерия подобия Коши.

Научно-исследовательский институт
Министерства строительства
предприятий машиностроения

Поступило
15 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Phillips, C. R., 68 (1869). [2] В. Л. Кирпичев, Сопротивление материалов, ч. 2, 1923.